

UCUENCA

Universidad de Cuenca

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

Análisis exploratorio de modelos guiados en datos informados por la física como modelos subrogantes en problemas de mecánica de sólidos no lineales

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Ingeniero Civil


Autores:

Emerson Roberto Aguilar Valarezo

Daniel Esteban Merchán Avila

Director:

Esteban Patricio Samaniego Alvarado

ORCID:  0000-0002-8728-491X

Cuenca, Ecuador

2025-09-25

Resumen

Este trabajo presenta una prueba de concepto basada en un enfoque multiescala *data-driven* (DD) para modelar el comportamiento elastoplástico de materiales sin utilizar leyes constitutivas explícitas. Se estudian dos configuraciones: caso unidimensional (barra) y bidimensional (deformación plana), considerando tanto plasticidad con endurecimiento como con ablandamiento. En la escala microscópica unidimensional y bidimensional (con endurecimiento) se generaron datos sintéticos para el material bajo tracción y para la celda unitaria sometida a corte correspondientemente. Estos datos esfuerzo-deformación alimentaron a un modelo DD que, en la escala macroscópica, resolvió el problema sin recurrir a un modelo constitutivo. Se logró una convergencia adecuada en ambos casos de endurecimiento (unidimensional y bidimensional). Sin embargo, en el caso de ablandamiento unidimensional, al aumentar la cantidad de elementos (de 3 a 5), el modelo con ablandamiento no logró una convergencia. En el caso bidimensional con ablandamiento, se empleó un modelo variacional tipo Deep Ritz para realizar experimentos virtuales de corte sobre la celda unitaria. Estos experimentos utilizaron condiciones de contorno tipo Dirichlet y las ecuaciones de equilibrio de la mecánica de medios continuos para obtener datos del comportamiento del material. Los resultados en 2D con ablandamiento mostraron que el modelo DD presenta dificultades en la resolución del problema, lo cual evidencia la necesidad de ajustes metodológicos en escenarios con localización de deformaciones. Se utilizó MATLAB y Python junto con bibliotecas de aprendizaje profundo para el entrenamiento del modelo. El estudio demuestra el potencial del enfoque DD para modelar materiales complejos sin requerir una formulación constitutiva explícita.

Palabras clave del autor: sólidos elastoplásticos, data-driven, enfoque multiescala



El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Cuenca ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por la propiedad intelectual y los derechos de autor.

Repositorio Institucional: <https://dspace.ucuenca.edu.ec/>

Abstract

This work presents a proof of concept based on a multiscale data-driven (DD) approach to modeling the elastoplastic behavior of materials without using explicit constitutive laws. Two configurations are studied: a one-dimensional case (bar) and a two-dimensional case (plane strain), considering both hardening and softening plasticity. At the one-dimensional and two-dimensional microscopic scales (with hardening), synthetic data were generated for the material under tensile loading and for the unit cell subjected to shear loading, respectively. These stress-strain data were fed into a DD model which, at the macroscopic scale, solved the problem without resorting to a constitutive model. Adequate convergence was achieved in both hardening cases (one-dimensional and two-dimensional). However, in the one-dimensional softening case, increasing the number of elements (from 3 to 5) caused the softening model to fail to achieve convergence. In the two-dimensional softening case, a Deep Ritz-type variational model was used to perform virtual shear experiments on the unit cell. These experiments used Dirichlet-type boundary conditions and the equilibrium equations of continuum mechanics to obtain data on material behavior. The 2D softening results showed that the DD model presents difficulties in solving the problem, highlighting the need for methodological adjustments in scenarios with strain localization. MATLAB and Python were used alongside deep learning libraries for model training. The study demonstrates the potential of the DD approach to model complex materials without requiring an explicit constitutive formulation.

Author Keywords: elastoplastic solids, data-driven, multiscale approach



The content of this work corresponds to the right of expression of the authors and does not compromise the institutional thinking of the University of Cuenca, nor does it release its responsibility before third parties. The authors assume responsibility for the intellectual property and copyrights.

Institutional Repository: <https://dspace.ucuenca.edu.ec/>

Índice de contenido

Introducción	13
1.1 Antecedentes y justificación	13
1.2 Objetivos	15
1.2.1 Objetivo general	15
1.2.2 Objetivos específicos	15
1.3 Alcance	15
1.4 Organización de capítulos	16
2 Marco teórico	18
2.1 Mecánica clásica de sólidos deformables	18
2.1.1 Postulados de conservación-balance	18
2.1.2 Cinemática de pequeñas deformaciones	18
2.1.3 Ecuación constitutiva elástica lineal	19
2.1.4 Formulación energética de la elasticidad	19
2.2 Teoría de la plasticidad	20
2.2.1 Descomposición aditiva de la deformación	20
2.2.2 Regla de fluencia	20
2.2.3 Dominio elástico. Función de fluencia. Superficie de fluencia	20
2.3 Homogenización de la celda unitaria	22
2.4 Modelo basado en Datos informado por la Física	23
2.4.1 Red neuronal del método Deep Ritz	23
2.5 Modelos de Plasticidad Basado en Datos	24
2.5.1 Restricciones del modelo	24
2.5.2 Solución a las incertidumbres del modelo	25
2.5.3 Problemas inelásticos. Parametrización	25
2.5.4 Evolución de los datos en el tiempo	25
2.5.5 Algoritmo de iteración de punto fijo para la solución mecánica y material mediante ecuaciones desacoplada	26
3 Metodología	28
3.1 Introducción	28
3.2 Generación de datos	29
3.2.1 Datos sintéticos	29
3.2.2 Datos obtenidos de la celda unitaria	30
3.3 Implementación del Modelo <i>data-driven</i>	33

4 Casos de Aplicación e implementación	34
4.1 Introducción	34
4.2 Caso 1: Plasticidad con endurecimiento para un elemento unidimensional	34
4.2.1 Planteamiento del problema	34
4.2.2 Datos de entrada	35
4.2.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados	35
4.3 Caso 2. Plasticidad con ablandamiento para un elemento unidimensional	38
4.3.1 Planteamiento del problema	38
4.3.2 Datos de entrada	39
4.3.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados	39
4.4 Caso 3. Plasticidad con endurecimiento para un elemento bidimensional	42
4.4.1 Planteamiento del problema	42
4.4.2 Datos de entrada	43
4.4.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados	44
4.5 Caso 4. Plasticidad con ablandamiento para un elemento bidimensional	50
4.5.1 Planteamiento del problema	50
4.5.2 Datos de entrada	51
4.5.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados	52
Conclusiones y Recomendaciones	61
Referencias	63

Índice de figuras

Figura 2.2.1. Representación gráfica del dominio elástico. Tomado de: Oliver Olivella & Agelet De Saracibar Bosch (2002) [10].	21
Figura 2.2.2. Ilustración del dominio elástico y estados admisibles en el espacio de tensiones. Tomado de: Simo (2000) [13].	21
Figura 2.2.3. Representación gráfica del comportamiento plástico con endurecimiento (izquierda) y con ablandamiento (derecha). Adaptado de (Oliver Olivella & Agelet De Saracibar Bosch, 2002) [10].	22
Figura 2.4.1. Algoritmo de iteración método Deep Ritz.	23
Figura 2.5.1. Algoritmo de iteración de punto fijo para la solución mecánica y material en la macroescala mediante ecuaciones desacopladas.	26
Figura 3.1.1. Diagrama de flujo sobre la metodología de estudio y desarrollo.	28
Figura 3.2.1. Esquema de las propiedades mecánicas del material.	29
Figura 3.2.2. Esquema de la geometría y condiciones de contorno del elemento bidimensional.	30
Figura 3.2.3. Curva esfuerzo-deformación de comportamiento elástico.	31
Figura 3.2.4. Curva esfuerzo-deformación de comportamiento elastoplástico con ablandamiento.	31
Figura 3.2.5. Estado último de deformación para un elemento plano sometido a corte simple.	32
Figura 4.2.1. Esquema gráfico del caso unidimensional.	34
Figura 4.2.2. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento para comportamiento de un elemento unidimensional.	35
Figura 4.2.3. Caso 1A-1. Resultados del modelo DD con endurecimiento.	36
Figura 4.2.4. Caso 1A-2. Resultados del modelo DD con endurecimiento.	37
Figura 4.2.5. Caso 1B-1. Solución del caso unidimensional con endurecimiento.	37
Figura 4.2.6. Caso 1B-2. Solución del caso unidimensional con endurecimiento.	38
Figura 4.3.1. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con ablandamiento para elemento unidimensional.	39
Figura 4.3.2. Caso 2A - Solución no convergida para el problema unidimensional con ablandamiento.	40

Figura 4.3.3. Esquema gráfico del problema unidimensional con perturbación inducida. ...	41
Figura 4.3.4. Caso 2B-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento.....	41
Figura 4.3.5. Caso 2B-2. Resultados del modelo DD con ablandamiento.....	42
Figura 4.4.1. Esquema gráfico del caso bidimensional.	43
Figura 4.4.2. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento para el elemento bidimensional.....	44
Figura 4.4.3. Caso 3A-2. Resultados del modelo DD con endurecimiento.....	45
Figura 4.4.4. Caso 3A-3. Resultados del modelo DD con endurecimiento.....	45
Figura 4.4.5. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $H = 0.1$.	46
Figura 4.4.6. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $H = 0.5$.	46
Figura 4.4.7. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $H = 0.7$.	47
Figura 4.4.8. Caso 3B. Resultados del modelo DD con endurecimiento.....	47
Figura 4.4.9. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $H = 0.1$. Nivel de ruido = 5%.	48
Figura 4.4.10. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $H = 0.3$. Nivel de ruido = 5%.	48
Figura 4.4.11. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $H = 0.5$. Nivel de ruido = 5%.	49
Figura 4.4.12. Caso 3C-1. Resultados del modelo DD con endurecimiento.	49
Figura 4.4.13. Caso 3C-2. Resultados del modelo DD con endurecimiento.	50
Figura 4.5.1. Placa bidimensional discretizada.	51
Figura 4.5.2. Regiones de la celda unitaria 2D.....	52
Figura 4.5.3. Caso 4A-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.	53
Figura 4.5.4. Caso 4A-2. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.	53
Figura 4.5.5. Cambio de sección para generar localización de deformaciones en la placa bidimensional.....	54
Figura 4.5.6. Caso 4B-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.	54
Figura 4.5.7. Caso 4C. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.	55

Figura 4.5.8. Caso 4D-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.....	56
Figura 4.5.9. Caso 4D-2. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.....	57
Figura 4.5.10. Combinación 1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.....	58
Figura 4.5.11. Combinación 2. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.....	59
Figura 4.5.12. Combinación 3. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.....	59

Índice de tablas

Tabla 3.2.1. Propiedades mecánicas del material.	30
Tabla 4.2.1. Propiedades mecánicas del material para el elemento unidimensional.	35
Tabla 4.3.1. Propiedades mecánicas del material para el elemento unidimensional.	39
Tabla 4.4.1. Propiedades geométricas y mecánicas del elemento bidimensional.	43
Tabla 4.5.1. Propiedades geométricas y mecánicas del elemento bidimensional.	51

Dedicatoria

Quiero dedicarle el resultado de este trabajo a Dios, principalmente por haberme dado la fuerza y la valentía para no rendirme en el transcurso de la carrera. A él le agradezco las cosas buenas y malas que viví, ya que me ayudaron a convertirme en una persona fuerte y respetable.

También quiero dedicarle este trabajo a mi familia, a todos los que en una frase u oración me desearon el bien y le pidieron a Dios que me de fuerza para continuar. A mi padre que me acompañó desde el cielo durante estos 5 años, por haberme enseñado a trabajar día y noche para alcanzar mis metas, por haberme inculcado responsabilidad y por las enseñanzas que en vida me dejó. A mi hermana, que estuvo presente en todo este camino, le agradezco porque en los momentos más duros estuvo conmigo, y es ella con quien ahora celebro esta victoria.

Emerson Roberto Aguilar Valarezo

Dedicatoria

El presente trabajo de investigación fue producto del esfuerzo, dedicación, entrega y compromiso constante conmigo, con mi compañero, tutor y con la ciencia. Representa la culminación de una etapa de aprendizaje increíble, por ello, quiero dedicar el fruto de este proyecto a mis padres, hermano y a Violeta, quienes siempre me apoyaron, acompañaron, impulsaron y brindaron su amor a lo largo de este trayecto sinuoso.

A Alison, quien caminó conmigo y me respaldó desde el inicio de la carrera. A mis tías, primas, primos y demás familiares cercanos, quienes siempre estuvieron pendientes de mí y no dudaron en darme una mano cuando la necesitaba.

Daniel Esteban Merchán Avila

Agradecimientos

A Dios, por ser nuestro refugio en los momentos de duda y el faro que ha guiado cada paso de este camino.

Al ingeniero Esteban Samaniego, director de este trabajo de titulación, le agradecemos infinitamente por su aporte, paciencia y dedicación incalculable, fundamentales para la ampliación de nuestros conocimientos durante el desarrollo de este trabajo.

A los ingenieros Jacinto Ulloa y Víctor Rivera, les agradecemos por su compromiso incondicional en el área investigativa, siendo el pilar fundamental en el proceso. Por sus valiosas sugerencias, las cuales lograron que nuestro conocimiento crezca exponencialmente en este proyecto.

A nuestros familiares y amigos, les agradecemos por su comprensión y esfuerzo silencioso, fundamentales para vencer y aprender de cada obstáculo que se presentó. Por las palabras de aliento y amor que hoy por hoy se ven reflejados en este trabajo.

A nuestros profesores, por compartir no solo conocimiento, sino también pasión por la ingeniería.

Introducción

1.1 Antecedentes y justificación

En ingeniería, la modelación de materiales suele partir de la hipótesis de medios continuos homogéneos, es decir, materiales cuyas propiedades mecánicas se consideran uniformes a escala macroscópica. Sin embargo, en la realidad, los sólidos están compuestos por múltiples fases o microestructuras que introducen heterogeneidades en sus propiedades locales. Para abordar esta discrepancia, el enfoque multiescala recurre a menudo al procedimiento de homogeneización (Bensoussan et al., 2011; Pavliotis & Stuart, 2008) [1] [11] que permite representar estos medios heterogéneos mediante materiales homogéneos efectivos, cuyo comportamiento global sea mecánicamente equivalente al del material real, sin necesidad de modelar explícitamente su microestructura.

En la práctica, se han desarrollado leyes o modelos constitutivos que reflejan de forma fenomenológica el comportamiento microscópico. Estas leyes, de carácter empírico, dependen en gran medida de ensayos experimentales para determinar parámetros como el módulo de elasticidad en sólidos elásticos. En consecuencia, una posibilidad interesante es implementar modelos guiados por datos (*data-driven*) sin suposiciones a priori sobre la estructura formal de la ecuación constitutiva que rige el comportamiento del material (Kirchdoerfer & Ortiz, 2016) [7]. Este método tiene, en principio, la capacidad de capturar estados mecánicos bastantes simples (elasticidad), medianamente complejos (plasticidad con endurecimiento) y altamente complejos (plasticidad con ablandamiento) de los materiales, sin la necesidad de la formulación de ecuaciones que describan las propiedades mecánicas del mismo. Su característica de adaptabilidad y optimización de recursos permite que sea un modelo auto-depurable (Zhang et al., 2022) [16].

Las capacidades de un modelo *data-driven* (DD) proporcionan una base para la construcción de modelos que no requieren suposiciones ad hoc. Un modelo guiado por datos permite mejorar el realismo del análisis. Prueba de ello lo evidencia Kirchdoerfer & Ortiz (2016) [7] a través de una estructura de celosía compuesta por barras articuladas. Además, en dicha referencia, se incorporó datos con ruido para evaluar la capacidad de resolución del modelo (Kirchdoerfer & Ortiz, 2017) [8]. De igual forma, Karapiperis et al. (2021) [6] y Ulloa et al. (2023) [14] aplican el principio y metodología de resolución DD en ensayos sobre un material granular para evaluar su comportamiento.

Como prueba de concepto, se usarán modelos basados en datos informados por la física para extraer el comportamiento constitutivo de un sólido, a partir de experimentos virtuales

en un volumen representativo. Dichos experimentos virtuales, en mecánica de sólidos, son simulaciones computacionales que permiten estudiar y analizar el comportamiento de materiales bajo diversas condiciones de carga y desplazamiento sin necesidad de realizar pruebas físicas en laboratorio o mediante una ecuación matemática previamente establecida. A su vez, para algunos de los casos, el comportamiento mecánico del material también vendrá dado por datos sintéticos generados. La generación de estos datos contempla una simulación idealizada sencilla de los estados admisibles esfuerzo-deformación para evaluar el modelo DD.

En cuanto a la resolución del volumen representativo dentro de las simulaciones virtuales, corresponderá a un enfoque variacional manteniendo la cinemática de discontinuidades fuertes dentro del campo de desplazamientos (León et al., 2025) [9] mediante redes neuronales informadas por la física (PINN). Estas permiten resolver el problema mecánico desacoplado y la ubicación de la banda de localización de deformaciones dentro de la celda unitaria.

Es importante destacar que, el modelo *data-driven* (DD) no se apoya en ecuaciones constitutivas ni en principios fenomenológicos, sino solamente en el historial de deformaciones y esfuerzos obtenidos ya sea mediante ensayos o, como en el caso de este trabajo, mediante homogeneización de un volumen representativo. En esencia, los modelos DD libres de modelos constitutivos consisten en resolver las ecuaciones de equilibrio de la mecánica del medio continuo junto con el comportamiento local del material obtenido directamente a partir de datos de la historia de procesos de carga (Ulloa et al., 2023) [14]. Se restringe el conjunto de estados posibles a los datos admisibles dado el historial de esfuerzo-deformación, para lo cual se usan técnicas de optimización, es decir, la búsqueda del estado más cercano al punto en los datos del material, mientras que al mismo tiempo se minimiza la distancia entre su “punto histórico” y el estado compatible al último paso de tiempo (Prume et al., 2023) [12].

La implementación y evaluación del modelo DD se realizará mediante cuatro casos de estudio o ensayos que contemplan dos estados mecánicos. Estos se encuentran aplicados a dos configuraciones dentro de la mecánica de sólidos: una barra (ensayo unidimensional) y una placa cuadrada (ensayo bidimensional). En este último caso, se utiliza la hipótesis de deformación plana.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

- Explorar el uso de un enfoque multiescala *data-driven* como alternativa para describir el comportamiento de sólidos no lineales a escala macroscópica, sin recurrir a leyes constitutivas explícitas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Realizar experimentos virtuales sobre un volumen representativo (RVE) y generar datos sintéticos que capturen los mecanismos fundamentales del comportamiento material que ocurren sobre los sólidos deformables estudiados.
- Usar modelos *data-driven* para describir la relación esfuerzo–deformación a partir de los datos obtenidos en el punto anterior, sin introducir una ley constitutiva explícita.
- Desarrollar y analizar cuatro casos de estudio para materiales elastoplásticos con endurecimiento y ablandamiento, considerando dos configuraciones geométricas: una barra (1D) y una placa (2D).
- Validar el modelo *data-driven*.

1.3 Alcance

Se pretende realizar una prueba de concepto de un modelo *data-driven* (DD) libre de modelo constitutivo para la modelización de sólidos con no linealidades materiales. Para ello, se han establecido tres componentes y partes claves en el desarrollo y verificación del modelo DD.

Primeramente, se busca generar conjuntos de estados mecánicos (pares de esfuerzo-deformación) que representen el comportamiento elástico y elastoplástico de un volumen material definido. Para ello se plantea producir datos sintéticos mediante una idealización de un problema 1D para cada estado mecánico. Y, además, se busca ejecutar experimentos virtuales de corte sobre una celda unitaria en el plano hasta alcanzar plasticidad con ablandamiento. Los resultados de estos experimentos virtuales (VE) se verán reflejados en la formación de bandas de localización de deformaciones (modelo variacional Deep Ritz) (León et al., 2025) [9].

A continuación, con los datos obtenidos sintéticamente junto con los resultantes de los experimentos virtuales (VE) (estados de tensión-deformación) sobre el volumen de control representativo (RVE), se plantea entrenar al modelo DD sin necesidad de introducir una ley constitutiva explícitamente. Para ello, el modelo guiado en datos (macroescala) plantea la

minimización de la distancia entre los pares de puntos representativos del estado tensional y deformacional calculados y los obtenidos sintéticamente o de VE, mediante la aplicación de restricciones basadas en la física (ecuación de equilibrio de Cauchy y cinemática de pequeñas deformaciones) para datos correspondientes (Prume et al., 2023) [12].

La validación de los resultados considera dos partes. La primera consiste en corroborar los resultados obtenidos del modelo basado en datos respecto a aquellos resultantes de los experimentos virtuales y datos sintéticos para cada caso evaluado. En tanto que la segunda, plantea diferentes escenarios posibles para verificar la convergencia del modelo DD respecto a cada uno.

Se requiere el uso del lenguaje de programación Python y Matlab, junto con las librerías y funciones especializadas en el desarrollo, entrenamiento y optimización de redes neuronales (TensorFlow) y métodos numéricos, tanto para la ejecución de los VE y datos sintéticos (escala microscópica), cuanto para el entrenamiento del modelo DD (escala macroscópica).

Para la generación de los experimentos virtuales, se hizo uso del código y modelo variacional desarrollado por (León et al., 2025) [9] para el caso de estudio de 2D con ablandamiento. Mientras que, para el modelo DD se tomó como base el código y método numérico desarrollado por (Ulloa et al., 2023) [14], sobre el cual se realizó ciertas modificaciones para adaptarlo a los casos de estudio que se plantean desarrollar.

1.4 Organización de capítulos

1.4.1 Introducción

En este capítulo se expone de manera general el estado del arte de los estudios de modelos guiados en datos informados por la física y modelos DD aplicados al medio continuo en experimentos elementales. Además, se incluye la justificación del problema, la importancia de abordar al mismo y los objetivos tanto general como específicos.

1.4.2 Marco teórico

En este capítulo se presenta una breve introducción al análisis de sólidos con propiedades heterogéneas como sólidos continuos homogéneos. Para ello, se comenzará explicando desde la aplicación de la mecánica de medios continuos de sólidos, los modelos de linealidad y no linealidad, teorías de plasticidad, proceso de homogeneización, modelo basado en datos informado por la física, análisis multiescala y entrenamiento de un modelo basado en datos que permite capturar plasticidad.

1.4.3 Metodología

En este capítulo se describen las dos principales componentes que se requieren para evaluar el modelo DD. Primeramente, la generación de estados tensionales que representen un material homogéneo elástico y elastoplástico con endurecimiento y ablandamiento. En este, se explican las metodologías adquiridas (datos sintéticos y experimentos virtuales) para la generación de las bases de datos correspondientes para los diferentes casos de estudio. Seguidamente, se indican los procesos metodológicos del modelo DD y las condiciones aplicadas para la evaluación los diferentes casos de estudio presentados. La descripción aborda desde el elemento unidimensional (una barra) hasta un elemento bidimensional (placa).

1.4.4 Casos de Aplicación e Implementación

En este capítulo, se usan los datos generados para procesarlos mediante el modelo DD. Se presentan las propiedades geométricas y mecánicas del problema para cada caso de estudio. Además, se explican las alternativas propuestas para evaluar el modelo DD. Entonces, se presentan los resultados obtenidos gráficamente para cada variante estudiada. Finalmente, se realiza un análisis de los resultados para comprobar la validez del modelo DD frente a todas las posibles combinaciones planteadas, indicándose la aplicabilidad y buena o nula convergencia del método.

1.4.5 Conclusiones y Recomendaciones

Por último, se presentan las conclusiones obtenidas en el trabajo de titulación junto con las recomendaciones y sugerencias para la implementación y desarrollo del modelo DD en el estudio del comportamiento de sólidos con plasticidad.

Marco teórico

2.1 Mecánica clásica de sólidos deformables

En el desarrollo de la teoría del medio continuo, se formulan ciertas ecuaciones de gobierno que permiten caracterizar un sólido deformable. En este caso, se plantea el problema mecánico desacoplado considerando un modelo elastoplástico bajo los postulados de conservación-balance, la cinemática de pequeñas deformaciones y las ecuaciones mecánicas constitutivas (elasticidad generalizada y plasticidad). Estos tres principios, junto con las condiciones de contorno permiten caracterizar el problema de valores iniciales.

2.1.1 Postulados de conservación-balance

Los postulados de conservación y balance se consideran válidos para todo medio continuo, independientemente de las deformaciones presentadas y del material que lo constituya (Oliver Olivella & Agelet De Saracibar Bosch, 2002) [10].

El problema del medio continuo se plantea en el ámbito de las pequeñas deformaciones, por lo que, la ecuación de conservación de la masa se vuelve irrelevante para este estudio. De hecho, la densidad ρ se considera una constante del material.

- Balance de la cantidad de movimiento en su forma local (ecuación de Cauchy)

Dado que se considera que el sólido está en equilibrio, esto provoca que el término de aceleración sea igual a cero. Recuérdese, además, que el estado tensional del medio se representa por el tensor de Cauchy σ . Entonces,

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.1)$$

- Principio de balance del momento angular en su forma local

El principio se traduce en la simetría del tensor de tensiones de Cauchy.

$$\sigma = \sigma^T \quad (2.2)$$

2.1.2 Cinemática de pequeñas deformaciones

El tensor de deformación infinitesimal, que se construye a partir del campo de desplazamientos de cada partícula material \mathbf{u} , controla la cinemática del problema. Se define como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.3)$$

2.1.3 Ecuación constitutiva elástica lineal

Se presenta la Ley de Hooke generalizada para problemas multidimensionales. Por tanto, se supone la proporcionalidad entre el tensor de tensiones σ , y deformaciones ε , a través de la constante de proporcionalidad denominada módulo de elasticidad.

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C} : \varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.5)$$

Se establece entonces la ecuación constitutiva para un material elástico lineal.

El tensor de cuarto orden \mathbb{C} (denominado *tensor de constantes elásticas*) tiene en principio $3^4 = 81$ componentes. Sin embargo, debido a la simetría de σ y ε , y a las llamadas simetrías mayores, entonces las constantes elásticas en \mathbb{C} se reducen a 21. Además, si se considera que el material es isótropo se requerirán solamente 2 constantes.

2.1.4 Formulación energética de la elasticidad

Se considera *la energía interna específica* $u(\mathbf{x}, t)$ (energía interna/unidad de masa) y la *densidad de energía interna* $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$ (energía interna/unidad de volumen) relacionadas por:

$$\hat{u}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 u(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{d\hat{u}}{dt} = \sigma : \mathbf{d} = \sigma : \dot{\varepsilon} \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{u}}{dt} = \sigma : \dot{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Esta última ecuación considera la naturaleza adiabática del proceso de deformación.

La forma global (integral) de la ecuación de la energía (2.8) se obtiene integrando sobre el volumen material V :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \hat{u} dV = \int_V \frac{d\hat{u}}{dt} = \int_V \sigma : \dot{\varepsilon} dV \quad (2.9)$$

$$U(t) = \int_V \hat{u}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.10)$$

Donde $U(t)$ es la energía interna del volumen material considerado.

De acuerdo a Oliver Olivella & Agelet De Saracibar Bosch (2002) [10], la potencial tensional (para el caso de elasticidad lineal) es una diferencia exacta:

$$\text{Potencial tensional} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \frac{dU}{dt} \quad (2.11)$$

2.2 Teoría de la plasticidad

2.2.1 Descomposición aditiva de la deformación

El planteamiento del modelo elastoplástico considera la descomposición aditiva de la deformación, para lo cual, divide a la deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$, en la deformación reversible elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y la deformación irrecuperable plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ de un punto material particular. Se plantea como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.12)$$

2.2.2 Regla de fluencia

La regla de fluencia permite definir la evolución de la deformación plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ en el planteamiento del modelo elastoplástico generalizado para tres dimensiones. En ese sentido, el estado tensional viene dado solamente por la deformación elástica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p] \quad (2.13)$$

donde \mathbb{C} es el tensor del módulo elástico constante.

2.2.3 Dominio elástico. Función de fluencia. Superficie de fluencia

Consideremos el caso unidimensional. Se define como dominio elástico en el espacio de tensiones al interior del dominio encerrado por $F(\sigma, \alpha) = 0$:

$$\text{Dominio elástico} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) < 0\} \quad (2.14)$$

Donde a la función $F(\sigma, \alpha): \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ se la denomina función de fluencia plástica.

Se define como dominio elástico lineal \mathbb{E}_σ^0 al dominio elástico correspondiente a una deformación plástica nula ($\boldsymbol{\varepsilon}^p = \alpha = 0$):

$$\text{Dominio elástico inicial} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma^0 := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) < 0\} \quad (2.15)$$

Un requerimiento adicional al dominio elástico inicial es que contenga al estado de tensión nula:

$$0 \in \mathbb{E}_\sigma^0 \Rightarrow F(0,0) < 0 \quad (2.16)$$

y ello se consigue definiendo la función de fluencia plástica mediante:

$$\text{Función de fluencia plástica} \rightarrow F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \quad (2.17)$$

donde $\sigma_f(\alpha) > 0$ es la denominada *tensión de fluencia*. El valor inicial (para $\alpha = 0$) de la tensión de fluencia es el límite elástico σ_e .

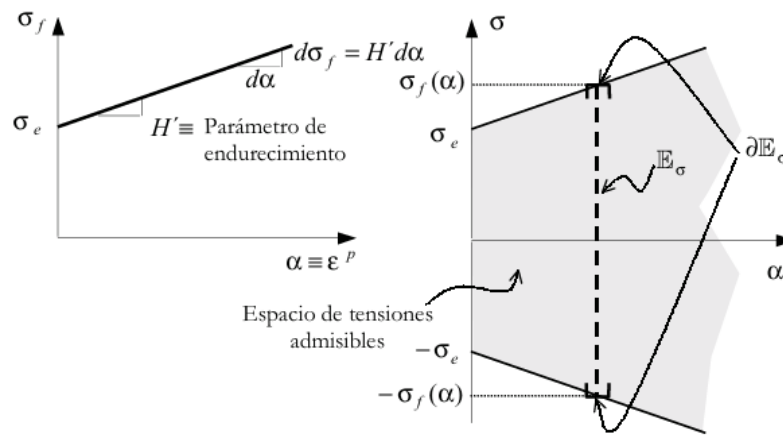


Figura 2.2.1. Representación gráfica del dominio elástico. Tomado de: Oliver Olivella & Agelet De Saracibar Bosch (2002) [10].

Se define la *superficie de fluencia* como el entorno del dominio elástico:

$$\text{Superficie de fluencia} \rightarrow \partial\mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0\} \quad (2.18)$$

El dominio elástico \mathbb{E}_σ junto con su contorno $\partial\mathbb{E}_\sigma$ determinan el espacio (dominio) de tensiones admisibles $\bar{\mathbb{E}}_\sigma$:

$$\text{Espacio de tensiones admisibles} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \leq 0\} \quad (2.19)$$

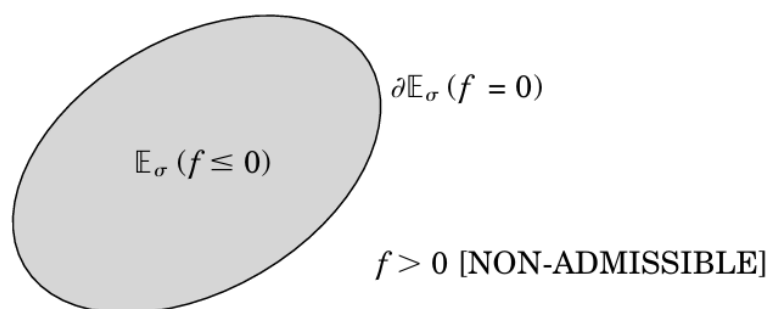


Figura 2.2.2. Ilustración del dominio elástico y estados admisibles en el espacio de tensiones. Tomado de: Simo (2000) [13].

y se *postula* que todo estado tensional factible (admissible) debe pertenecer al espacio de tensiones admisibles $\bar{\mathbb{E}}_\sigma$. De acuerdo con las definiciones del dominio elástico de la superficie de fluencia y del espacio de tensiones admisibles, puede establecerse lo siguiente:

$$F(\sigma, \alpha) < 0 \Leftrightarrow |\sigma| < \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma \text{ en el dominio elástico} \\ (\sigma \in \mathbb{E}_\sigma) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$F(\sigma, \alpha) < 0 \Leftrightarrow |\sigma| = \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma \text{ en la superficie de fluencia} \\ (\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma) \end{cases} \quad (2.21)$$

$$F(\sigma, \alpha) < 0 \Leftrightarrow |\sigma| > \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \text{estadotensional no admisible} \quad (2.22)$$

De manera ilustrativa, en la Figura 2.2.3 se presentan los dos estados mecánicos elastoplásticos posibles dentro de un medio continuo: plasticidad con endurecimiento y plasticidad con ablandamiento.

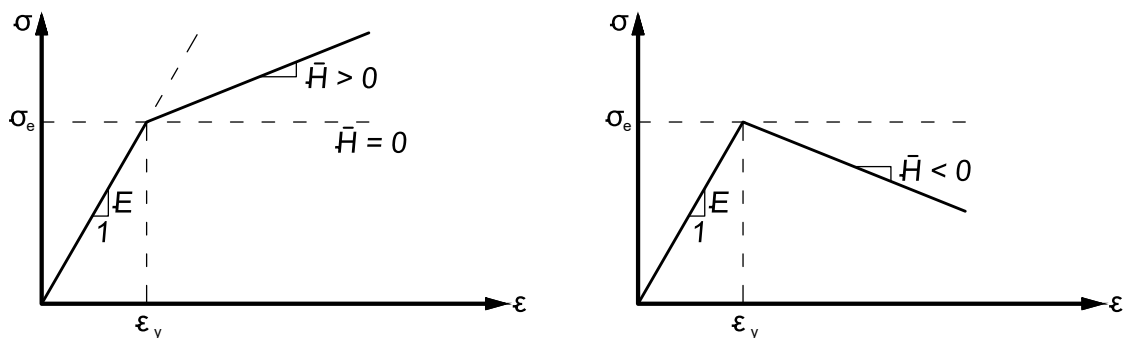


Figura 2.2.3. Representación gráfica del comportamiento plástico con endurecimiento (izquierda) y con ablandamiento (derecha). Adaptado de (Oliver Olivella & Agelet De Saracibar Bosch, 2002) [10].

2.3 Homogenización de la celda unitaria

La homogenización de la celda unitaria consiste en la reconstrucción del comportamiento mecánico obtenido del experimento virtual. Dicho comportamiento corresponde a la zona elástica de la curva esfuerzo-deformación. Dicha zona es considerada para el estudio debido a su linealidad, en consecuencia, cuando el material actúa en su rama elástica sus propiedades microscópicas permanecen inalteradas.

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (2.23)$$

2.4 Modelo basado en Datos informado por la Física

2.4.1 Red neuronal del método Deep Ritz

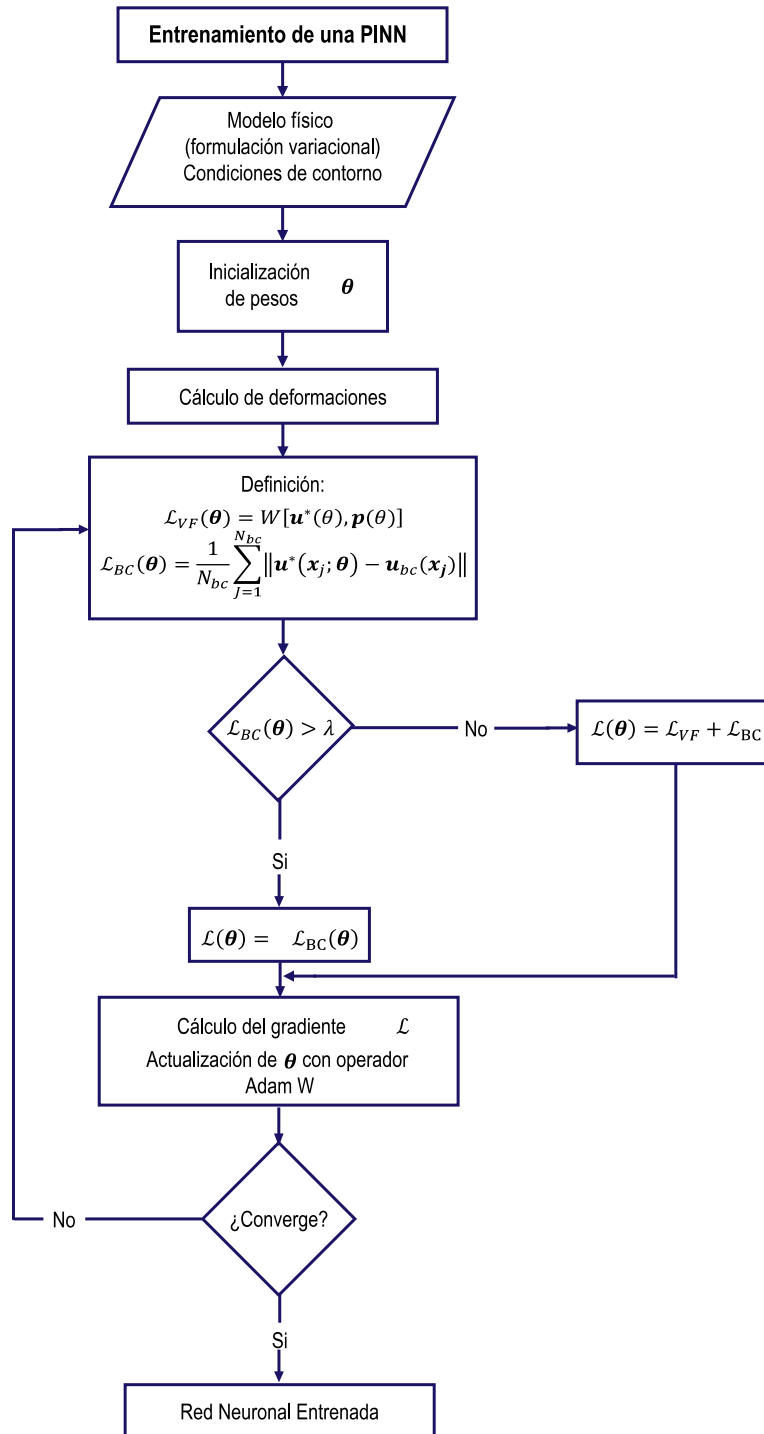


Figura 2.4.1. Algoritmo de iteración método Deep Ritz.

En la Figura 2.4.1 se puede apreciar un diagrama de flujo que explica la metodología Deep Ritz. El método Deep Ritz utiliza un enfoque variacional/energético para la mecánica de sólidos en el contexto de redes neuronales informadas por la física cuyo principio se sostiene en la minimización de la energía. Una PINN es la implementación de una red neuronal artificial

(ANN) ligeramente modificada, que se basa en una arquitectura de red y un optimizador, utilizando la diferenciación automática para calcular gradientes (Griewank & Walther, 2008) [5]. La característica principal es una función de pérdida que contiene información sobre fenómenos físicos del problema mecánico. En este sentido, las ecuaciones de balance se introducen como restricciones (León et al., 2025) [9].

2.5 Modelos de Plasticidad Basado en Datos

La computación basada en datos consiste en resolver las ecuaciones de equilibrio de la mecánica de medios continuos junto con el comportamiento local del material que se obtiene directamente de los datos empíricos (Ulloa et al., 2023) [14], obtenidos ya sea de ensayos o de experimentos numéricos sobre volúmenes representativos. Luego, se encuentran soluciones (Conti et al., 2018) [3] minimizando una métrica adecuada entre los estados mecánicamente admisibles y los datos del material. De esta manera, se pueden utilizar datos de experimentos y/o simulaciones a menor escala. La modelación basada en datos también se ha aplicado a materiales inelásticos (Ciftci et al., 2022; Eggersmann et al., 2019) [2] [4].

Se realizan simulaciones representativas de problemas de valores límite. Con la información obtenida de estas simulaciones, se analiza las posibles ventajas y limitaciones del marco basado en datos con respecto a la mecánica de plasticidad del continuo.

2.5.1 Restricciones del modelo

El sistema mecánico con m puntos materiales es caracterizado por el campo de deformaciones y por el campo de esfuerzos. El estado del sistema puede verse como un punto $z = \{z_e\}_{e=1}^m$ en el espacio global $Z = \mathbb{R}^{md \times md}$. El espacio de fase global está equipado con una norma adecuada,

$$\|z\|^2 = \|\varepsilon, \sigma\|^2 = \sum_{e=1}^m \omega_e (\mathbf{C}_e \varepsilon_e \cdot \varepsilon_e + \mathbf{C}_e^{-1} \sigma_e \cdot \sigma_e) \quad (2.24)$$

que define una medida de distancia con los coeficientes \mathbf{C}_e , siendo \mathbf{C} un operador numérico (Ulloa et al., 2023) [14]. Además, se define el conjunto global de datos materiales $D = D_1 \times \dots \times D_m$ como la recopilación de conjuntos de datos locales que consta de datos experimentales.

Las restricciones físicas están dadas por el equilibrio y la compatibilidad, se encuentran discretizadas considerando el desarrollo de las mismas en su forma débil:

$$\sum_{e=1}^m \omega_e \mathbf{B}_e^T \sigma_e = f, \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_e = \mathbf{B}_e u, \quad e = 1, \dots, m \quad (2.26)$$

Donde \mathbf{B}_e es el operador gradiente relacionado al campo de desplazamientos u (Prume et al., 2023) [12].

2.5.2 Solución a las incertidumbres del modelo

Las restricciones físicas del modelo se encuentran englobadas en un conjunto de restricciones Z , mismas que contienen todos los estados. Se define la siguiente función de minimización y su proyección al punto (dato) más cercano z_i como:

$$y_{MD} = \min \|y_i - z_i\|^2 \quad (2.27)$$

$$z_i = P_E(y_i) = \min_{Z \in E} \|z - y_i\|^2 \quad (2.28)$$

2.5.3 Problemas inelásticos. Parametrización

Este marco de solucionar problemas se ha extendido a los problemas inelásticos. La idea principal es restringir el conjunto de datos a los datos admisibles dado el historial de deformación. Una opción particular de dicha parametrización es:

$$D_{e,k+1} = \{y_{e,i,k+1} \in D_e: y_{e,i,k}\} \quad (2.29)$$

donde los datos se etiquetan con marcadores de tiempo para los pasos de tiempo k . A continuación, el solucionador asociado calcula el valor óptimo $y_{i,k+1} \in D_{k+1}$ mientras que al mismo tiempo minimiza la distancia entre su "punto histórico" $y_{i,k} \in D_k$ y el estado compatible del último paso de tiempo k .

2.5.4 Evolución de los datos en el tiempo

Para definir el conjunto de datos adecuado $D^{k+1} \in D$, en el momento t_{k+1} , cuyos pares de tensión-deformación son compatibles con las restricciones físicas y una historia dada $\{(\varepsilon_e^s, \sigma_e^s)\}_{s \leq k}$, (Eggersmann et al., 2019) [4] se plantea la aplicación de una variable interna $\mathbf{q}_e \in Q_e$ como función discretizada $q: D_e \rightarrow Q_e$ para cada punto material $(\varepsilon_e, \sigma_e)$. Esta condición se cumple si $(\varepsilon_e, \sigma_e, q_e) \in D_e \times Q_e$. Se define entonces el conjunto de datos que evoluciona con el tiempo como:

$$D_e^{k+1} := \{(\varepsilon_e^{k+1}, \sigma_e^{k+1}) \in Z_e: \phi(\mathbf{q}_e^{k+1}, \{\varepsilon_e^s\}_{s \leq k+1}, \{\sigma_e^s\}_{s \leq k+1})\} \quad (2.30)$$

Donde ϕ es una relación genérica que debe cumplirse por la historia local de los pares tensión-deformación y la variable interna de estado.

El problema basado en datos discretizado se resuelve de forma iterativa de un punto fijo, este es:

$$\inf_{y \in D^{k+1}} \inf_{z \in E^{k+1}} \|y - z\|^2 = \inf_{z \in E^{k+1}} \inf_{y \in D^{k+1}} \|y - z\|^2 \quad (2.31)$$

2.5.5 Algoritmo de iteración de punto fijo para la solución mecánica y material mediante ecuaciones desacoplada

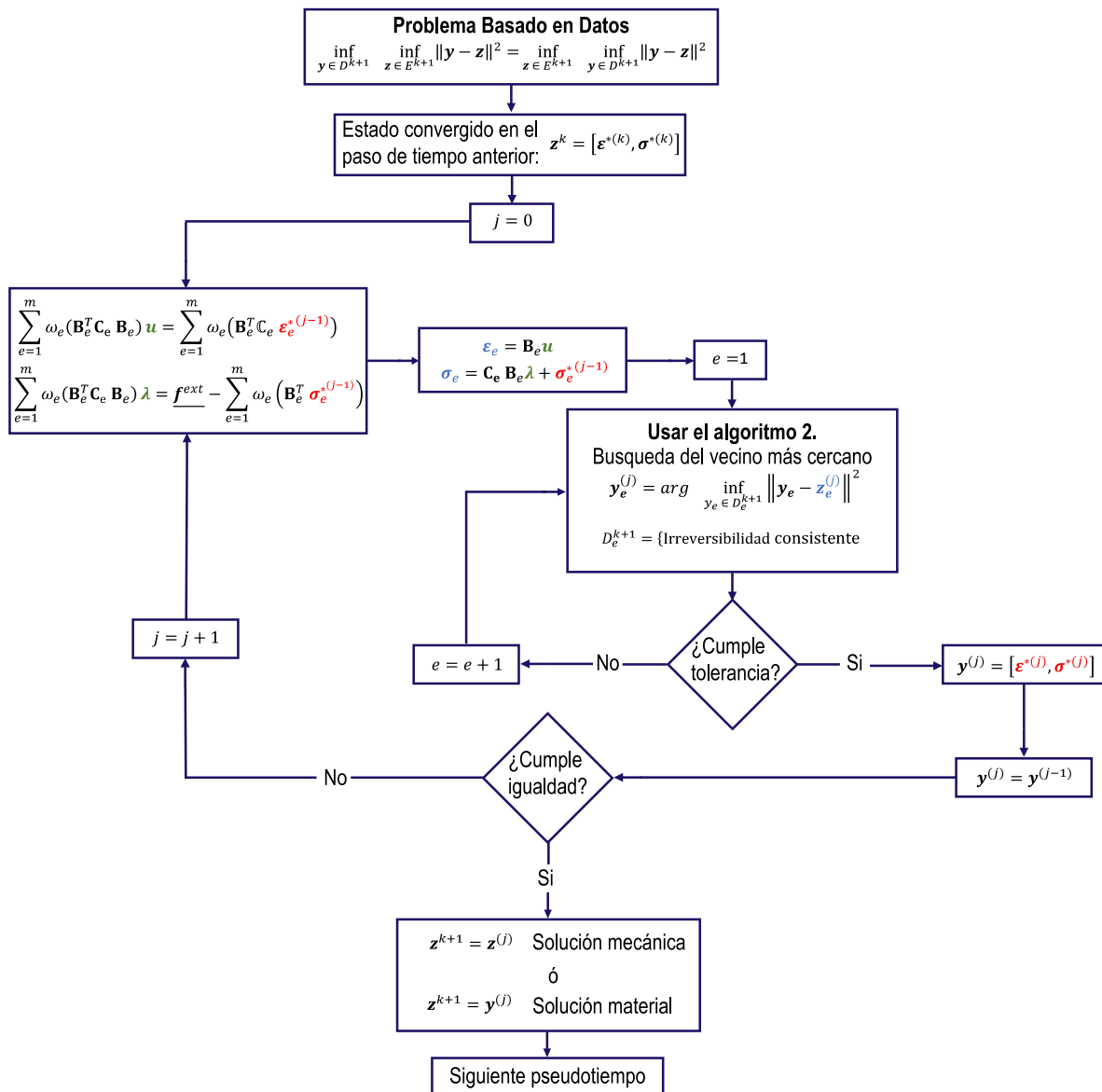


Figura 2.5.1. Algoritmo de iteración de punto fijo para la solución mecánica y material en la macroescala mediante ecuaciones desacopladas.

El método numérico se caracteriza porque se trata por separado la ecuación de equilibrio mecánico y la ecuación que rige el comportamiento del material. En el algoritmo que se

muestra en la Figura 2.5.1 se puede apreciar el orden de las iteraciones del método, así como las condiciones y ecuaciones que se deben cumplir. Tome en cuenta que el bucle externo del algoritmo en cuestión corresponde a las iteraciones para el cumplimiento de la convergencia, es decir, la variable j es la variable de iteración del algoritmo por cada pseudotiempo. El pseudotiempo ayuda a representar la evolución de las deformaciones sin necesidad de una integración explícita en el tiempo real. En este caso, cada pseudotiempo se refiere a un desplazamiento parcial que se le impone al elemento en todos los puntos de la parte superior o externa. Dicho de otra forma, el pseudotiempo son desplazamientos pequeños, que en conjunto dan un desplazamiento impuesto total en la fibra superior o en el extremo de la celda unitaria en el ensayo a corte simple o de tracción sobre la barra para el caso unidimensional correspondientemente.

Continuando con el algoritmo, se presentan el núcleo de cálculo con tres condiciones que controlan el problema mecánico: ecuaciones que rigen el equilibrio, ecuaciones mecánicas desacopladas y algoritmo de minimización material. Estas se resuelven consecutivamente para obtener el comportamiento constitutivo del material, sin embargo, para lograr una convergencia entre la solución mecánica y material se sigue un algoritmo anidado.

El algoritmo sobre el cual se implementa el método numérico de minimización se conoce como "*búsqueda del vecino más cercano*". Este recorre por toda la información del archivo de entrada para calcular la *cercanía* (distancia) que existe entre estados mecánicos y materiales admisibles a las condiciones del problema. Esta dispersión debe ser mínima para ciertos pares de esfuerzo-deformación, permitiendo al método encontrar la solución material (dentro de la base de datos) que más se aproxime a la solución mecánica, sabiendo que, en algún punto la solución mecánica también llega a depender de la solución material.

Metodología

3.1 Introducción

El presente capítulo contiene el procedimiento aplicado para generar los datos requeridos a ser introducidos en el modelo DD. La generación de datos corresponde tanto para el caso unidimensional como para el bidimensional, diferenciándose entre datos sintéticos y generados de experimentos virtuales. Por otro lado, la implementación del modelo DD considera las particularidades dirigidas a cada caso de estudio. El diagrama de flujo de la metodología general se puede apreciar en la Figura 3.1.1.

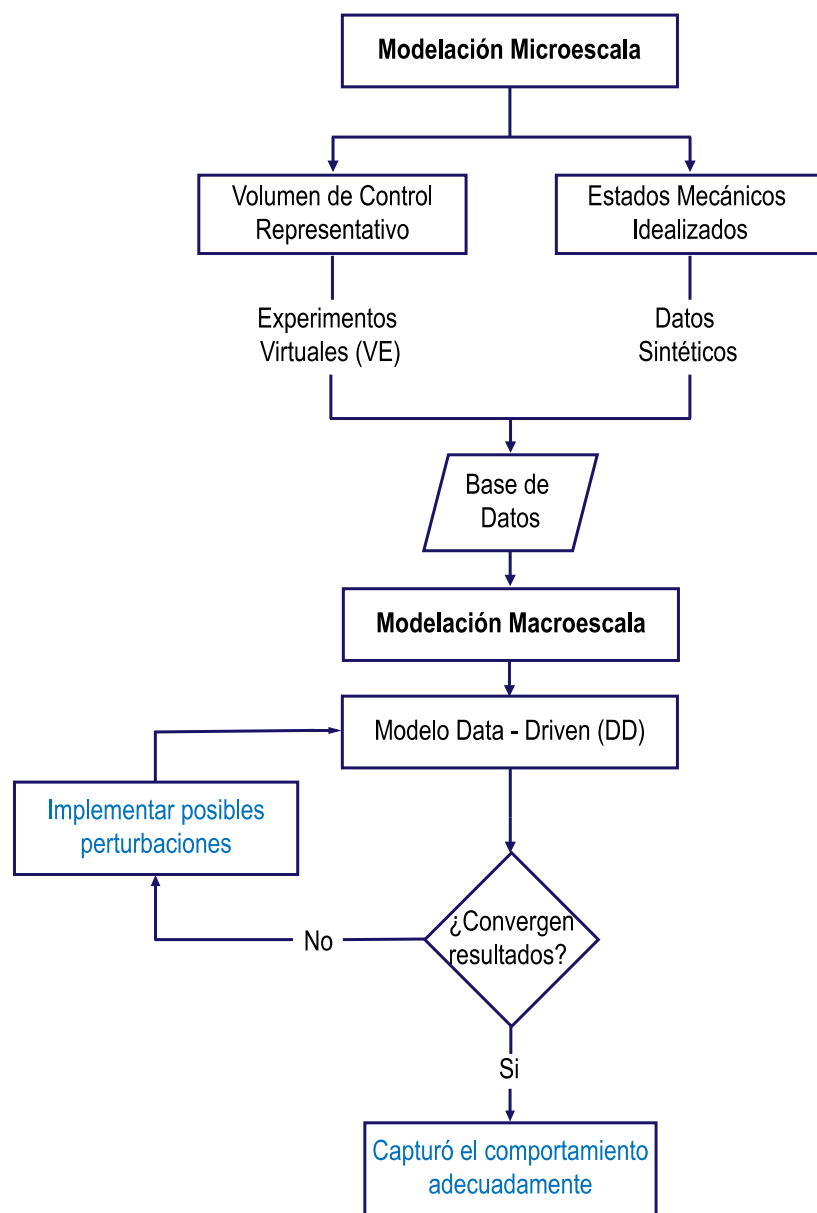


Figura 3.1.1. Diagrama de flujo sobre la metodología de estudio y desarrollo.

Además, como punto de control para la obtención de los resultados del modelo DD en el caso bidimensional, se toma el nodo más alejado arriba a la derecha de la placa.

3.2 Generación de datos

El producto de la generación de datos sintéticos y mediante el uso de una celda unitaria es un conjunto de pares esfuerzo-deformación en la microescala que permitan realizar, a modo de evaluación del modelo DD, una prueba de concepto. Por lo tanto, se aplicará este mecanismo para el estudio de los casos de plasticidad con endurecimiento y ablandamiento tanto para un elemento unidimensional como bidimensional.

En todos los casos mencionados se tienen propiedades mecánicas y geométricas asignadas particularmente a cada uno para la formulación de la prueba de concepto.

3.2.1 Datos sintéticos

El esquema de las propiedades mecánicas del material para la obtención y generación de los datos se observan en la Figura 3.2.1.

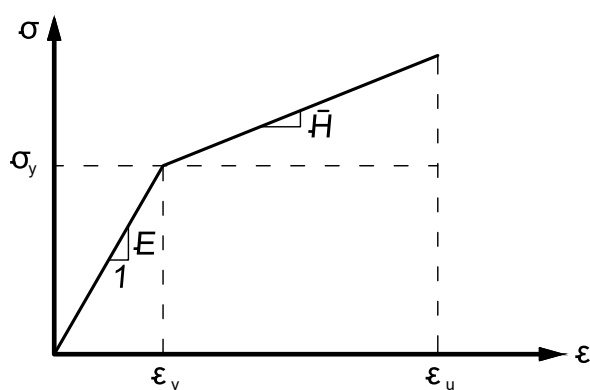


Figura 3.2.1. Esquema de las propiedades mecánicas del material.

La generación de estos datos presenta varias ventajas para el análisis, tanto para un material unidimensional como bidimensional. Obtener el conjunto de pares esfuerzo-deformación de estados mecánicos simples de experimentos de laboratorio o experimentos virtuales resulta poco viable y, en muchos casos, innecesario. Por lo que, la generación sintética representa una alternativa adecuada y factible dentro del alcance de este trabajo.

El cálculo de los pares esfuerzo-deformación resultaron mediante las siguientes ecuaciones, tanto para la región elástica como para la zona plástica correspondientemente.

$$\sigma = E\varepsilon; \quad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_y \quad (3.1)$$

$$\sigma = \sigma_y + \bar{H}(\varepsilon - \varepsilon_y); \quad \varepsilon_y \leq \varepsilon_u \quad (3.2)$$

En la Tabla 3.2.1, se presentan la descripción de las propiedades mecánicas del material.

Tabla 3.2.1. Propiedades mecánicas del material.

Variable	Descripción
σ_Y	Esfuerzo de fluencia
ε_Y	Deformación de fluencia
E	Módulo de elasticidad
\bar{H}	Módulo de plasticidad

Para el caso con endurecimiento y ablandamiento el módulo intrínseco de plasticidad toma correspondientemente los valores,

$$\begin{aligned} \bar{H} &> 0 \\ \bar{H} &< 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La generación de datos sintéticos se realiza tanto para el caso unidimensional y bidimensional.

3.2.2 Datos obtenidos de la celda unitaria

El método Deep Ritz presentado en el apartado 2.4.1, permitió, mediante una celda unitaria, capturar el comportamiento mecánico al someter un elemento bidimensional a un ensayo de corte simple, como se indica en la Figura 3.2.2. El resultado corresponde al conjunto de pares esfuerzo-deformación admisibles sujetos a condiciones de contorno determinadas y sobre el volumen de control representativo.

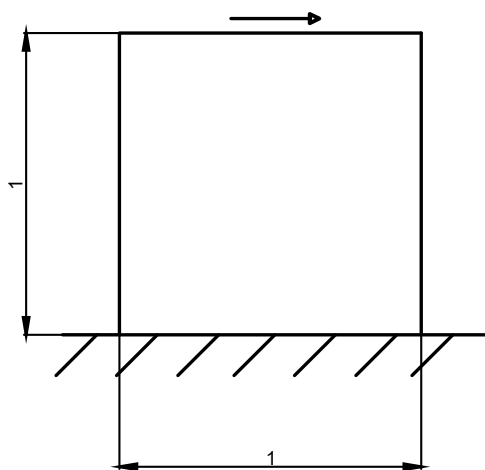


Figura 3.2.2. Esquema de la geometría y condiciones de contorno del elemento bidimensional.

Como se había indicado anteriormente, la plasticidad con ablandamiento resulta un fenómeno complejo de análisis y experimentación matemática. Por lo que, la aplicación de una celda unitaria sujeta al principio de minimización de la energía para resolver el problema de la formación de una banda de localización de deformaciones resulta adecuado y necesario. En

dicho sentido, y como prueba de concepto, se utilizarán estos datos en la evaluación del modelo DD.

Para la generación de los datos, se ejecutó el experimento virtual partiendo desde el reposo y gradualmente, a manera constante, se impusieron los desplazamientos horizontales hasta alcanzar el estado de ruptura del material. Es importante remarcar que, los pares de estados correspondientes a la rama elástica de puntos dentro y fuera de la banda de localización fueron obtenidos mediante la homogenización de la celda unitaria (ver sección 2.3).

En ese sentido, la Figura 3.2.3 y Figura 3.2.4, presentadas a continuación, contemplan los conjuntos de puntos materiales de comportamiento elástico y elastoplástico con ablandamiento a lo largo del experimento virtual.

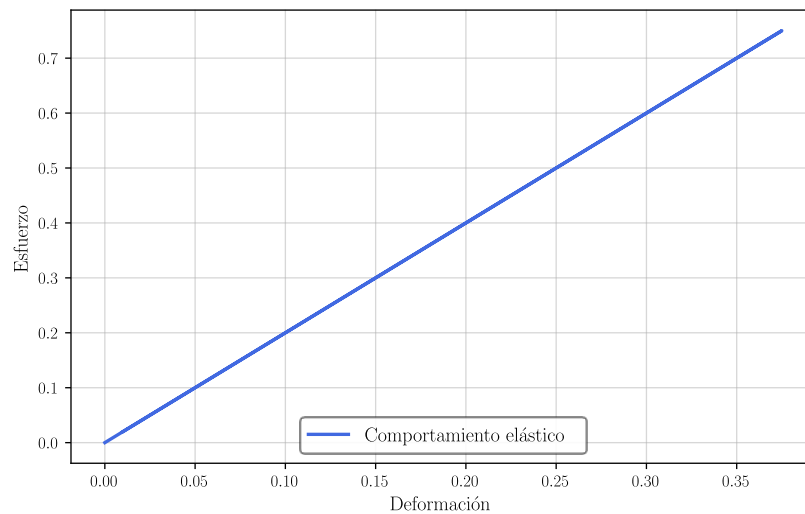


Figura 3.2.3. Curva esfuerzo-deformación de comportamiento elástico.

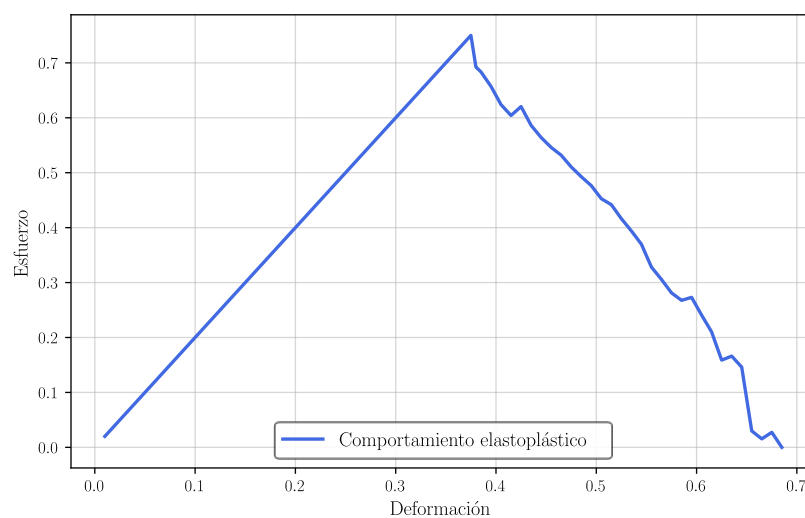


Figura 3.2.4. Curva esfuerzo-deformación de comportamiento elastoplástico con ablandamiento.

Por otro lado, en la Figura 3.2.5 se muestra el último estado de deformación del elemento sujeto a corte. En este, se observa la formación de la banda de localización en el centro de la celda unitaria, mientras que los extremos superior e inferior mantienen un comportamiento elástico.

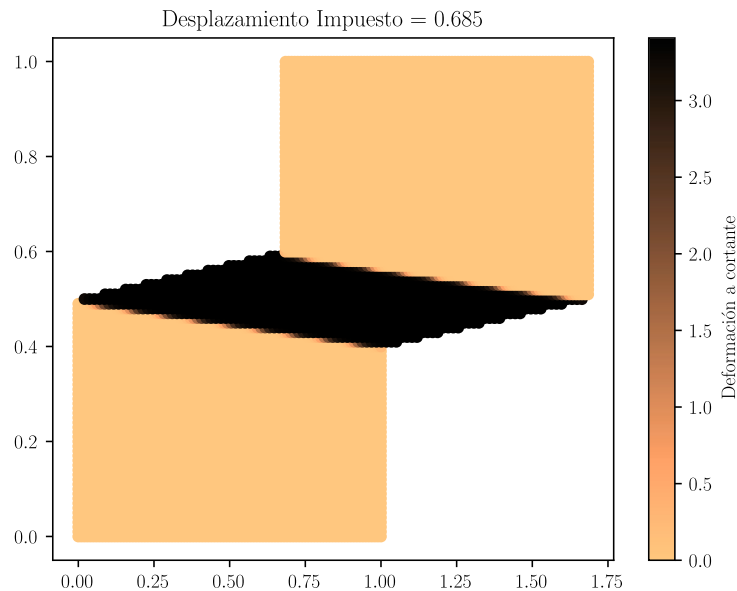


Figura 3.2.5. Estado último de deformación para un elemento plano sometido a corte simple.

Sumando a esto, la celda unitaria otorga además un parámetro que tiene el objetivo de indicar el momento (aunque se hable de un pseudotiempo) en el que se forma la banda de localización, es decir, se genera plasticidad con ablandamiento. Esta variable, desde ahora llamada como parámetro de irreversibilidad, permite identificar una línea de tiempo-historia a lo largo del experimento para el modelo DD.

Finalmente, a los diferentes datos obtenidos es necesario realizar una depuración para garantizar convergencia y correlación con el caso de estudio analizado. Esta limpieza comprende tanto el descarte de valores atópicos (generados por problemas numéricos en los resultados de la celda unitaria) como la asunción de valores iguales a cero en los esfuerzos y deformaciones en las direcciones principales (experimento de corte puro). Por lo tanto, las variables principales que comprende el conjunto de datos/resultados correspondientes al experimento son ε_{xy} , σ_{xy} (deformación y esfuerzo cortante) y p (parámetro de irreversibilidad) que se obtiene del método Deep Ritz y garantiza que la solución respete la formulación variacional del problema.

3.3 Implementación del Modelo *data-driven*

El desarrollo del modelo contempla, como se había indicado anteriormente, la resolución secuencial de las ecuaciones y restricciones necesarias para concebir el problema mecánico del medio continuo, en este caso, una barra y una placa, sometidos a ensayos de tracción y corte simple correspondientemente.

La implementación en el lenguaje de programación de Matlab corresponde primeramente a una discretización por elementos. Este fraccionamiento en longitudes o áreas más pequeñas responde al uso de elementos finitos para la resolución de las ecuaciones mecánicas desacopladas y las condiciones de compatibilidad y equilibrio que controlan el problema. Entonces, se otorga una solución en términos de fuerza-desplazamiento que sugiere ser correcta y admisible para luego compararse con los datos generados sintéticamente o proveniente de los VE.

Los casos sobre los que se va a implementar y evaluar el modelo DD son:

- Caso de barra unidimensional con comportamiento elastoplástico con endurecimiento con datos de ingreso generados sintéticamente.
- Caso de barra unidimensional con comportamiento elastoplástico con ablandamiento con datos de ingreso generados sintéticamente.
- Caso de placa bidimensional con comportamiento elastoplástico con endurecimiento con datos de ingreso generados sintéticamente.
- Caso de placa bidimensional con comportamiento elastoplástico con ablandamiento con datos de ingreso generados a partir de una celda unitaria.

Es importante indicar que, para el elemento bidimensional se usaron elementos finitos cuadrangulares, los cuales presentan cuatro puntos de integración por elemento. A diferencia de los elementos unidimensionales, los que se resuelven mediante un punto de integración.

Casos de Aplicación e implementación

4.1 Introducción

Los diferentes casos de estudio que se plantean para evaluar y validar la aplicabilidad del modelo DD bajo ciertas condiciones particulares corresponden a dos configuraciones: un elemento unidimensional, el cual, puede hacerse analogía a una barra, y un elemento bidimensional, el cual correspondería a una placa cuyo espesor es considerablemente menor que las dimensiones en los otros dos sentidos (deformación plana).

El análisis inicia con el estudio del comportamiento del modelo para el elemento unidimensional, debido a la facilidad matemática y numérica. Luego, introducir el caso bidimensional, mismo que sugiere un estudio más complejo. De igual manera, para cada uno se van a realizar experimentos de endurecimiento y ablandamiento (en dicho orden). Entonces, se plantean 4 escenarios posibles.

4.2 Caso 1: Plasticidad con endurecimiento para un elemento unidimensional

4.2.1 Planteamiento del problema

El primer escenario de estudio corresponde a una barra, cuya geometría y condiciones de contorno se indican en la Figura 4.2.1

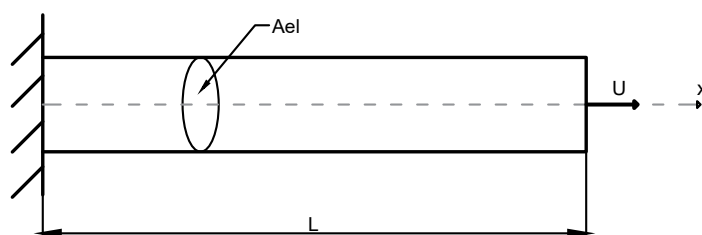


Figura 4.2.1. Esquema gráfico del caso unidimensional.

El problema unidimensional se restringe en el extremo izquierdo mediante un empotramiento, en tanto que el extremo derecho, se encuentra libre y sometido a un desplazamiento monótono constante $\delta = 0.02$ aplicado en toda el área. Por lo tanto, el experimento corresponde a un ensayo a tracción. Matemáticamente, las condiciones de contorno se pueden expresar de la siguiente manera, asumiendo una longitud $L = 1$ correspondiente al largo de la barra.

$$u(0) = 0, \quad u(L) = \delta \quad (4.1)$$

Todo el volumen que representa el elemento unidimensional posee un área de sección transversal $A_{el} = 1$ y propiedades del material constantes (esfuerzo de fluencia, módulo de elasticidad, módulo intrínseco de plasticidad).

4.2.2 Datos de entrada

La generación sintéticos, como se explicó en el apartado 3.2.1, presenta las propiedades del material que se muestran en la Tabla 4.2.1.

Tabla 4.2.1. Propiedades mecánicas del material para el elemento unidimensional.

Variable	Descripción	Magnitud
σ_Y	Esfuerzo de fluencia	0.5
E	Módulo de elasticidad	100
\bar{H}	Módulo de endurecimiento	15

Entonces, los datos de ingreso al modelo generados para el caso de análisis de una barra con endurecimiento corresponden a dos tramos de recta que se muestran en la Figura 4.2.2.

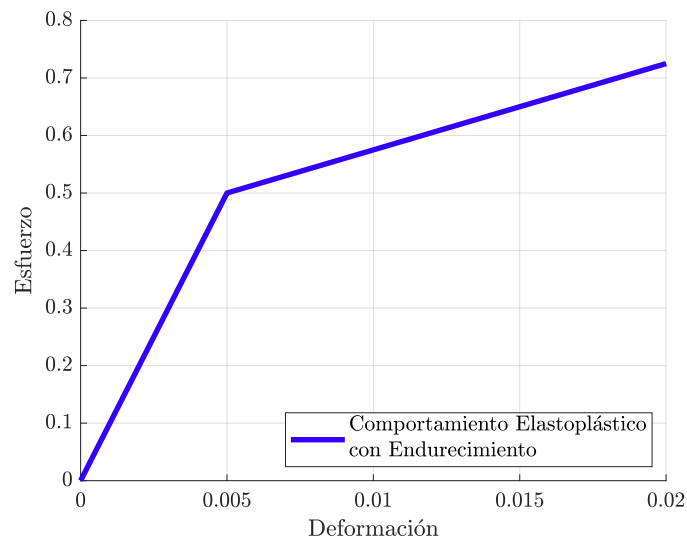


Figura 4.2.2. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento para comportamiento de un elemento unidimensional.

4.2.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados

De acuerdo al método de solución indicado anteriormente, se seleccionan ciertos parámetros de control para garantizar la convergencia y correcta obtención de los resultados en el modelo. Estos se describen a continuación.

A) Control sobre el número de iteraciones y tolerancia

La resolución del modelo DD se basa en la convergencia de la curva material y mecánica mediante la minimización de la distancia entre sus valores de esfuerzo-deformación. Como primera aproximación, la solución del estado mecánico que se muestra en la Figura 4.2.3, corresponde a los parámetros iniciales de iteraciones y tolerancia indicados. Es importante mencionar que el número máximo de iteraciones que se colocó en el modelo fue de 100. Luego, se van a presentar los diferentes resultados variando dichos parámetros, con el objetivo de evaluar la capacidad del modelo para capturar el comportamiento de plasticidad con endurecimiento en el espécimen unidimensional.

Entonces, imponiendo una tolerancia poco estricta dentro del método de solución y convergencia del modelo se obtienen los resultados que se presentan en la Figura 4.2.3.

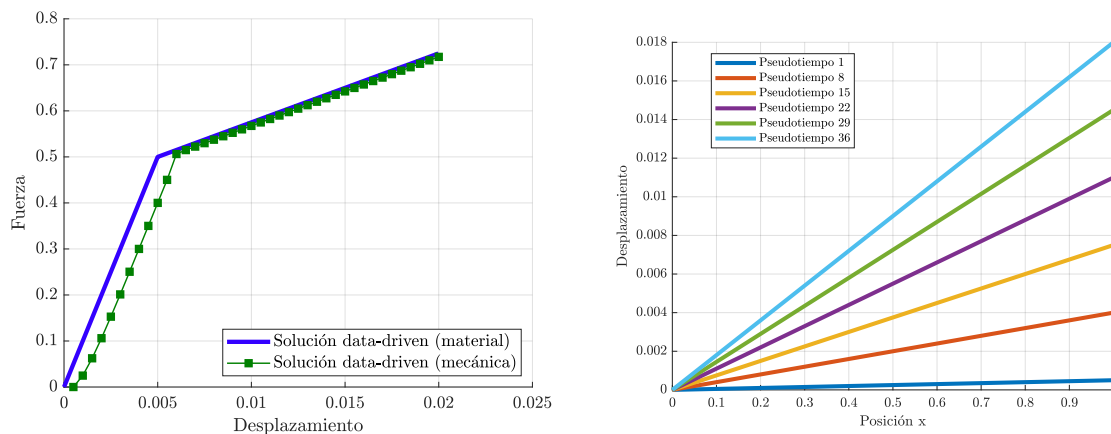


Figura 4.2.3. Caso 1A-1. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-2$, número de iteraciones alcanzadas = 1, número de elementos = 3 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

De acuerdo a la Figura 4.2.3, la curva mecánica no cae directamente sobre la solución material. Es decir, el método, pese a encontrar una solución que cumpla con las condiciones y restricciones impuestas, no captura la solución correcta.

Entonces, considerando una tolerancia bastante estricta y un amplio número de iteraciones dentro del modelo, se obtiene la solución que se presenta en la

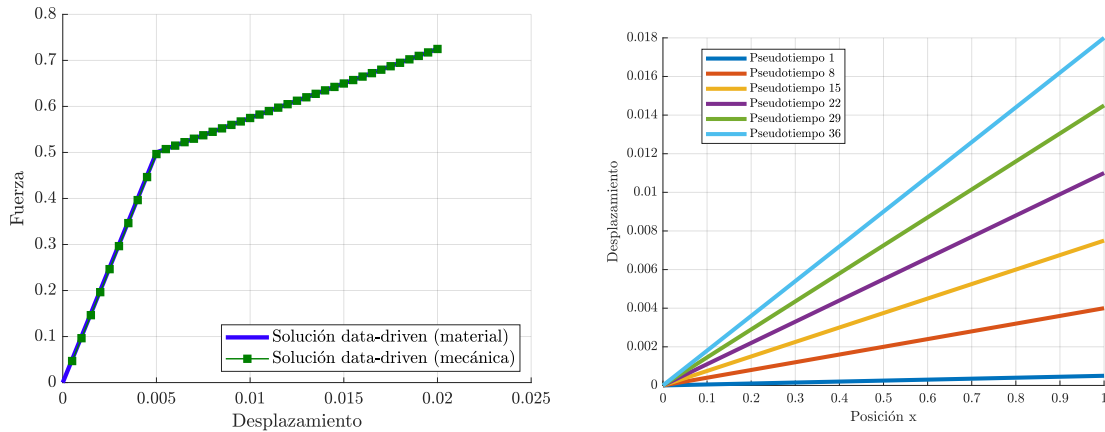


Figura 4.2.4. Caso 1A-2. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 3 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

Según se indica en la Figura 4.2.4 (izquierda), el modelo capturó la solución mecánicamente admisible y correcta correspondiente al comportamiento de la barra a lo largo del experimento. Además, en la Figura 4.2.4 (derecha) se indica el desplazamiento para cada paso de pseudotiempo dentro del ensayo, lo cual, es mecánicamente correcto.

B) Control sobre la discretización de la barra

Parte de la resolución en la implementación del método dentro del modelo DD es la resolución de las ecuaciones de gobierno mediante elementos finitos para obtener las fuerzas internas del material en cada nodo. Por lo tanto, la discretización de dichos elementos es relevante para el análisis de convergencia en cuanto a la exactitud en la solución admisible al experimento. Por ejemplo, la discretización en cinco elementos permite que la solución sea la que se muestra en la Figura 4.2.5.

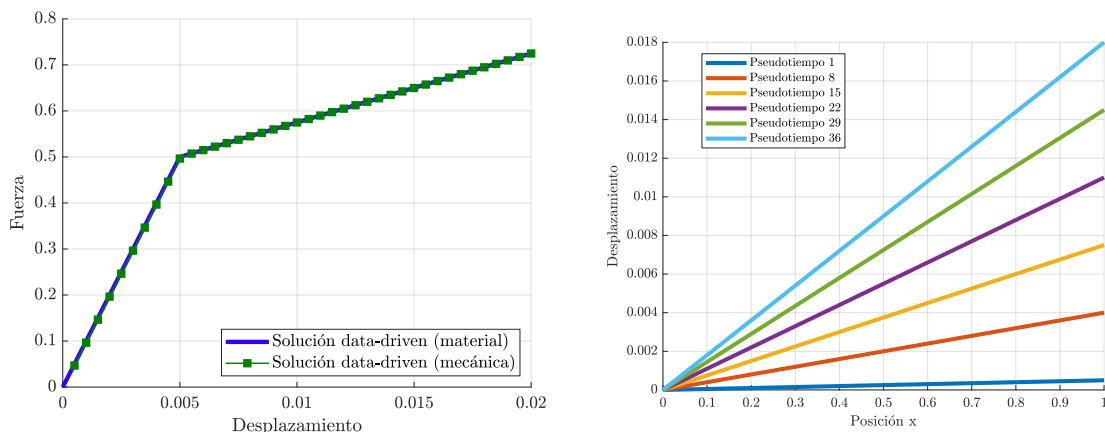


Figura 4.2.5. Caso 1B-1. Solución del caso unidimensional con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 5 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

Siguiendo con esta metodología, colocar un gran número de elementos supone que cada uno de ellos tenga una longitud más pequeña. En la Figura 4.2.6 se puede apreciar la solución del modelo DD para una discretización de 10 elementos.

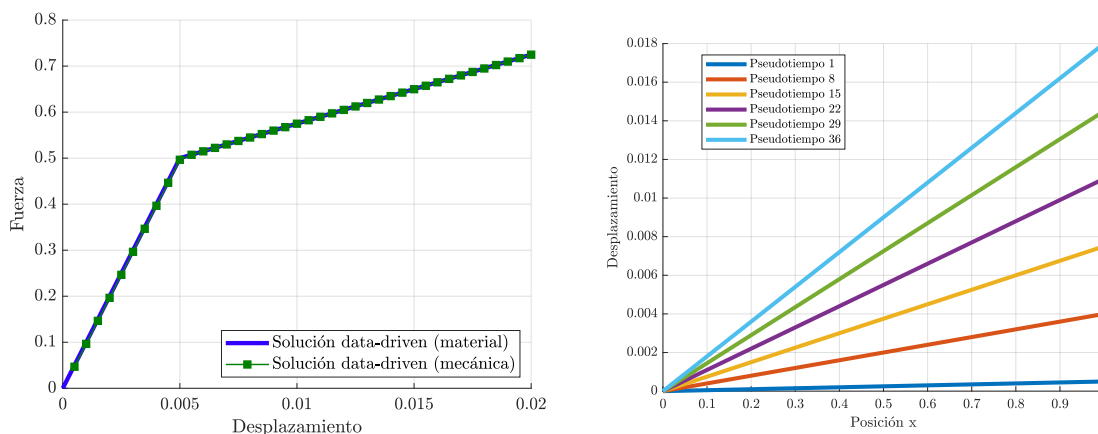


Figura 4.2.6. Caso 1B-2. Solución del caso unidimensional con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 10 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

Como se observan en los resultados obtenidos anteriormente, el modelo DD captura adecuadamente el comportamiento suponiendo una tolerancia estricta. Además, la solución converge al correspondiente comportamiento material al generar una mayor discretización sobre el elemento unidimensional.

Por otro lado, la evolución del desplazamiento a lo largo del ensayo no se ve afectada por la variación de los parámetros de convergencia analizados y otorga un resultado correcto.

4.3 Caso 2. Plasticidad con ablandamiento para un elemento unidimensional

4.3.1 Planteamiento del problema

El segundo escenario de estudio corresponde a una barra con una sección transversal constante, cuya geometría y condiciones de contorno son las mismas que ya se indicaron en apartado 4.2.1.

Las condiciones de contorno se pueden expresar conforme a la ecuación (4.1), asumiendo una longitud $L = 1$ correspondiente al largo de la barra y un desplazamiento monótono constante $\delta = 0.068$, aplicado en toda el área.

Todo el volumen que representa el elemento unidimensional posee un área de sección transversal $A_{el} = 1$ y propiedades del material definidas.

4.3.2 Datos de entrada

La información de entrada para entrenar el modelo constitutivo DD será generada mediante datos sintéticos (ver 3.2.1). Cuyas propiedades mecánicas se muestran en la Tabla 4.3.1.

Tabla 4.3.1. Propiedades mecánicas del material para el elemento unidimensional.

Variable	Descripción	Magnitud
σ_Y	Esfuerzo de fluencia	0.5
E	Módulo de elasticidad	100
\bar{H}	Módulo de endurecimiento	-15

Para este caso de estudio, los datos de entrada se indica en la Figura 4.3.1. Estos corresponden a pares esfuerzo-deformación que conforman dos tramos de recta, una elástica y otra elastoplástica con ablandamiento.

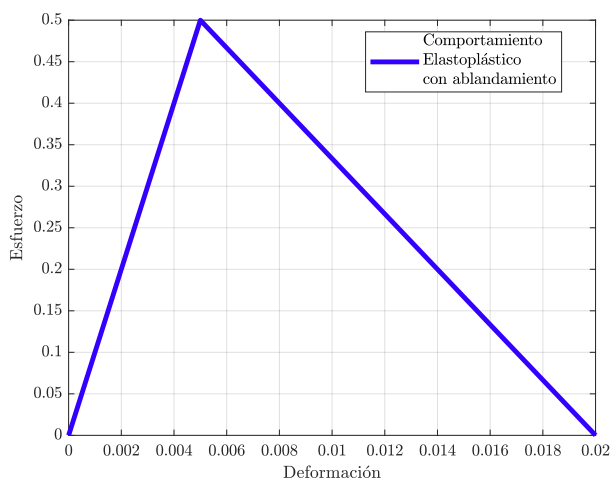


Figura 4.3.1. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con ablandamiento para elemento unidimensional.

4.3.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados

A) Control de tolerancia y número de iteraciones del método

El control sobre la tolerancia y número de iteraciones determinó que el modelo DD no posee la capacidad de capturar el comportamiento elastoplástico con ablandamiento dentro de la barra. Es decir, el método numérico requiere de una perturbación para obtener una solución admisible al problema. A continuación, en la Figura 4.3.2 se evidencia la no convergencia del

modelo. Se indica la solución por cada elemento discretizado de la barra. Además, es importante mencionar que, el número máximo de iteraciones ingresadas al modelo es de 100.

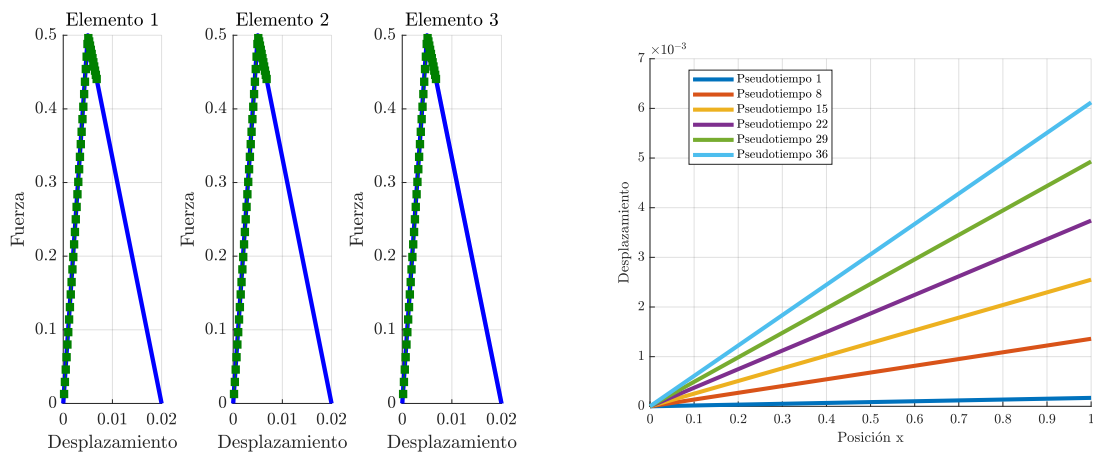


Figura 4.3.2. Caso 2A - Solución no convergida para el problema unidimensional con ablandamiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 2, número de elementos = 3 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

Por lo tanto, la perturbación a implementar dentro del ensayo consiste en un cambio de sección transversal sobre un elemento particular de la barra. De forma que, se esperaría que se produjese una concentración de deformaciones en dicha zona generando una discontinuidad o salto en el campo de los desplazamientos. Este concepto de perturbación fue implementado de manera similar por León et al. (2025) [9].

B) Perturbación por cambio de sección

Como se indicó anteriormente, se va a inducir una perturbación de tipo geométrica sobre la barra discretizada en 3 elementos. Es decir, se está perturbando al elemento unidimensional para que se localicen las deformaciones en una sección donde el área transversal (A_s) es el 90% del área inicial. A cada sección de la barra le corresponde una longitud L_e . El área transversal a lo largo de la barra se describe como,

$$A(x) = A_{el}, \quad 0 \leq x < L_e \tag{4.2}$$

$$A(x) = A_s, \quad L_e \leq x < 2L_e \tag{4.3}$$

$$A(x) = A_{el}, \quad 2L_e \leq x \leq L \tag{4.4}$$

A continuación, en la Figura 4.3.3 se presenta la geometría sobre la cual se va a evaluar el modelo DD.

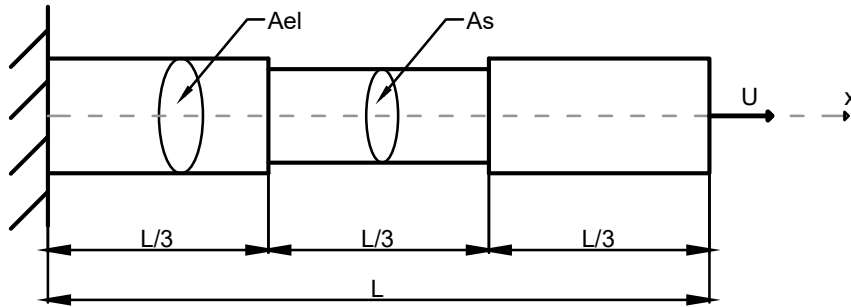


Figura 4.3.3. Esquema gráfico del problema unidimensional con perturbación inducida.

El experimento de tracción en el caso de estudio, presenta la misma probabilidad de que la zona de ablandamiento se localice en el centro de la barra como en cualquiera de los extremos. Esto debido a la no-homogeneidad de los materiales en todos sus puntos en la escala microscópica, así como imperfecciones geométricas en ciertos tramos a lo largo de la barra.

Sin embargo, la localización de deformaciones considerando: un material homogéneo en todos sus puntos, geometría correctamente definida y condiciones de contorno controladas, tiene tendencia a producirse en el centro del espécimen. Por lo tanto, el área de la barra sobre la cual existe un angostamiento se localiza en la mitad (corresponde al elemento del medio). Ver Figura 4.3.3.

Entonces, bajo las puntualizaciones planteadas, la Figura 4.3.4 corresponde a los resultados obtenidos para la barra dividida en 3 elementos considerando la perturbación en el elemento del medio.

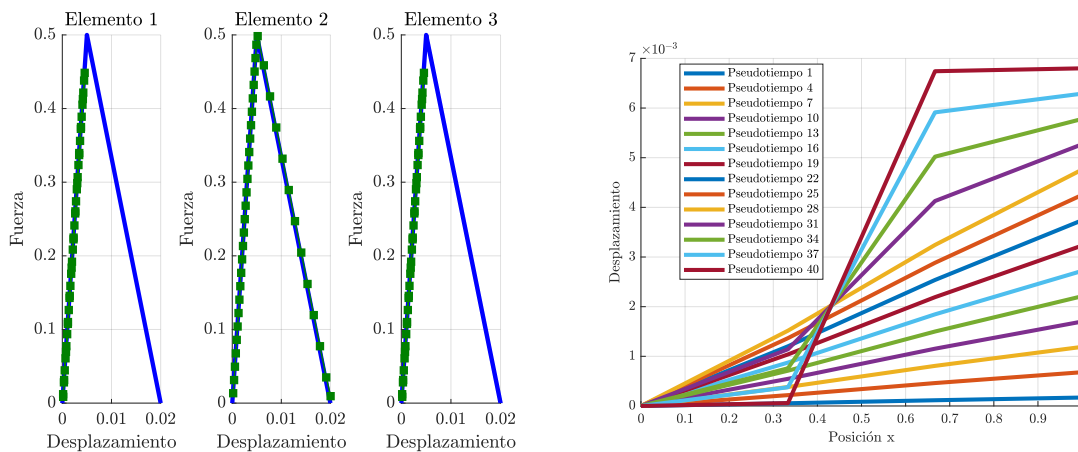


Figura 4.3.4. Caso 2B-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 2, número de elementos = 3 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

En la Figura 4.3.4 (izquierda), se observa que el modelo capturó correctamente el comportamiento de plasticidad con ablandamiento en el elemento perturbado, al igual que el

comportamiento elástico en los elementos de los extremos. Este resultado se corrobora con el salto de desplazamientos (Figura 4.3.4, derecha) que se genera sobre el elemento que incurre en ablandamiento dentro de la barra.

Validado parcialmente el modelo DD es importante considerar un mayor número de elementos (sobre los cuales se discretiza la barra) para garantizar convergencia y aplicabilidad general del modelo. En ese sentido, se planteó el mismo problema y la aplicación de la perturbación para una barra dividida en 5 elementos. En este caso, se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 4.3.5.

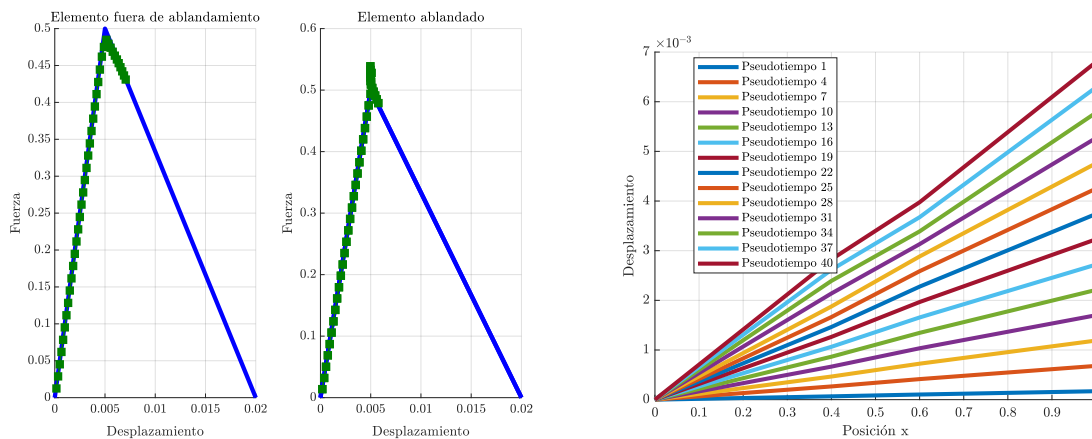


Figura 4.3.5. Caso 2B-2. Resultados del modelo DD con ablandamiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones = 100, número de elementos = 5 (izquierda). Evolución del desplazamiento a lo largo de la barra (derecha).

Como se observa en la Figura 4.3.5, contrario a lo obtenido en la Figura 4.3.4, el modelo presenta dificultades para encontrar una solución admisible al problema de análisis solamente realizando una perturbación sobre el área transversal del elemento central. Por lo que, se requieren implementar otro tipo de perturbaciones, mecanismos de convergencia o regularizaciones al problema analizado para permitir que el modelo DD encuentre una solución admisible.

4.4 Caso 3. Plasticidad con endurecimiento para un elemento bidimensional

4.4.1 Planteamiento del problema

El caso de estudio correspondiente resulta más complejo que los anteriores, pues ahora se evalúa el modelo DD sobre una placa cuadrada cuyo espesor es considerablemente menor respecto al largo y ancho del elemento. Para efectos prácticos y como prueba de concepto

se admitirá un espesor cercano a cero. El elemento bidimensional presenta una longitud unitaria en sus direcciones principales.

El experimento que se va a realizar corresponde a un ensayo de corte simple sobre una placa, cuyas dimensiones principales (horizontal y vertical) son unitarias, sobre la cual se han impuesto las condiciones de contorno tipo Dirichlet para concebir el caso de estudio.

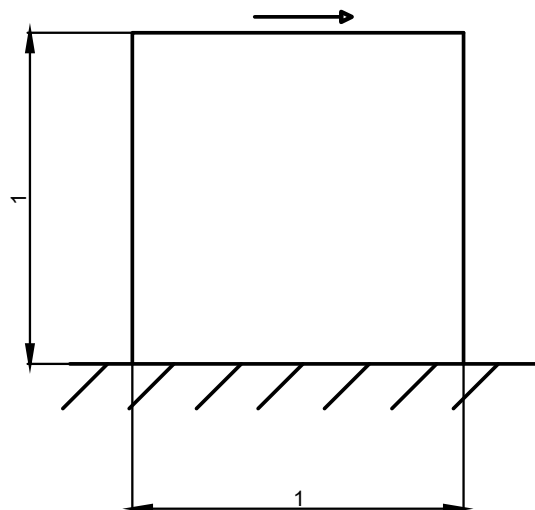


Figura 4.4.1. Esquema gráfico del caso bidimensional.

En ese sentido, como se puede apreciar en el esquema de la Figura 4.4.1, la parte inferior se encuentra fija restringiendo el desplazamiento y giro, en tanto que la parte superior está libre. Sobre el extremo libre se impone un desplazamiento tangencial monótono con magnitud igual a $\delta = 0.685$ a lo largo del experimento. Además, la placa se discretizó en 9 elementos.

$$u_x(x, 1) = \delta \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \quad (4.5)$$

$$u_x(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (4.6)$$

4.4.2 Datos de entrada

El conjunto de pares esfuerzo-deformación corresponden a datos generados de manera sintética (de acuerdo a 3.2.1) que representan un comportamiento elastoplástico con endurecimiento. Las propiedades del material usadas para ellos se presentan en la Tabla 4.4.1.

Tabla 4.4.1. Propiedades geométricas y mecánicas del elemento bidimensional.

Variable	Descripción	Magnitud
ν	Módulo de Poisson	0.40

E	Módulo de elasticidad	5600
\bar{H}	Módulo de endurecimiento	0.30

Por lo tanto, en la Figura 4.4.2 se muestran los datos a implementarse en el modelo DD en primera instancia.

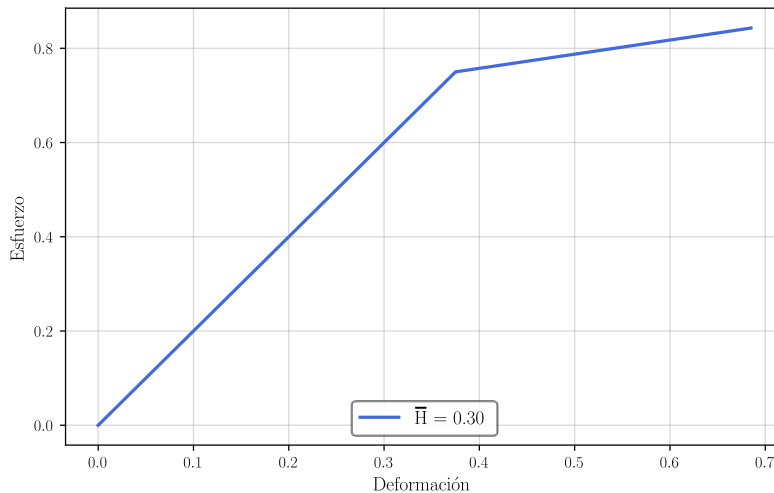


Figura 4.4.2. Curva elasto-plástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento para el elemento bidimensional.

4.4.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados

Siguiendo la metodología de resolución, el desarrollo del experimento contempla inicialmente un control sobre la tolerancia y número de iteraciones. Este proceso iterativo de aproximación al valor mecánicamente más cercano y admisible, debe permitir que se cumplan las restricciones del modelo DD.

A) Control de tolerancia y número de iteraciones

Se realizó una serie de ensayos variando los parámetros de tolerancia y número de iteraciones con el objetivo de verificar la aproximación y posibilidad de capturar el comportamiento elasto-plástico con endurecimiento. Los resultados obtenidos se presentan en las figuras Figura 4.4.3 y Figura 4.4.4. Teniendo en cuenta que, el número máximo de iteraciones ingresadas al modelo fue de 100.

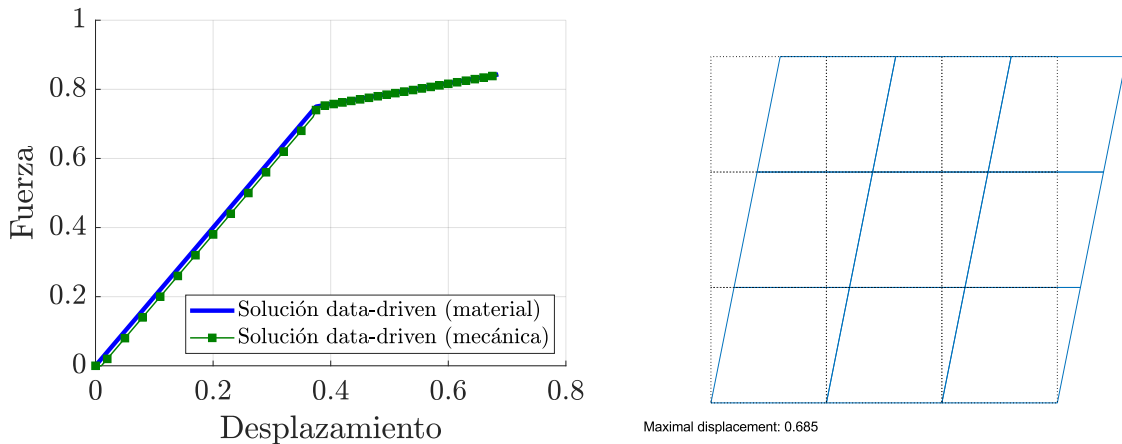


Figura 4.4.3. Caso 3A-2. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-2$, número de iteraciones alcanzadas = 1, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

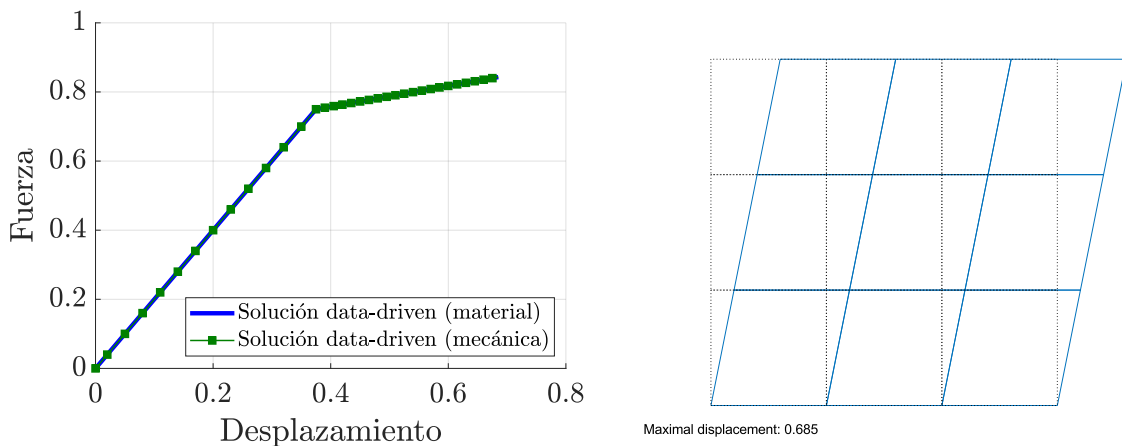


Figura 4.4.4. Caso 3A-3. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

Como se observa, cuando los datos ingresados corresponden a plasticidad con endurecimiento, el modelo *data-driven* sobre un elemento bidimensional captura este comportamiento de manera adecuada implementando una tolerancia estricta. Por ende, y similar a los resultados obtenidos del caso 1 (ver 4.2.3), para una tolerancia flexible el modelo converge a una solución no adecuada y precisa.

B) Implementación de varios comportamientos de plasticidad con endurecimiento

Para verificar los resultados del modelo DD se han considerado la inserción de comportamientos materiales diferentes en la rama de plasticidad. Por ejemplo, plasticidad con diferentes módulos de endurecimiento.

Para ello, se ingresó varios conjuntos de pares esfuerzo-deformación como datos de entrada al modelo DD. Estos se muestran a continuación en la Figura 4.4.5, Figura 4.4.6 y Figura 4.4.7.

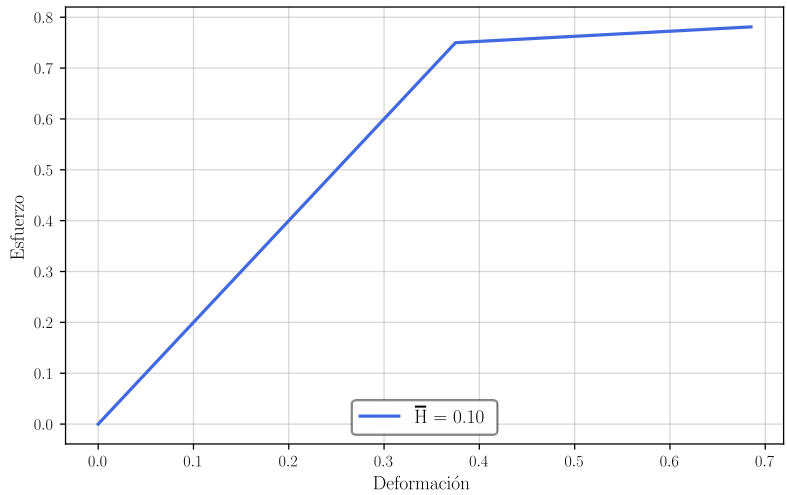


Figura 4.4.5. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $\bar{H} = 0.1$.

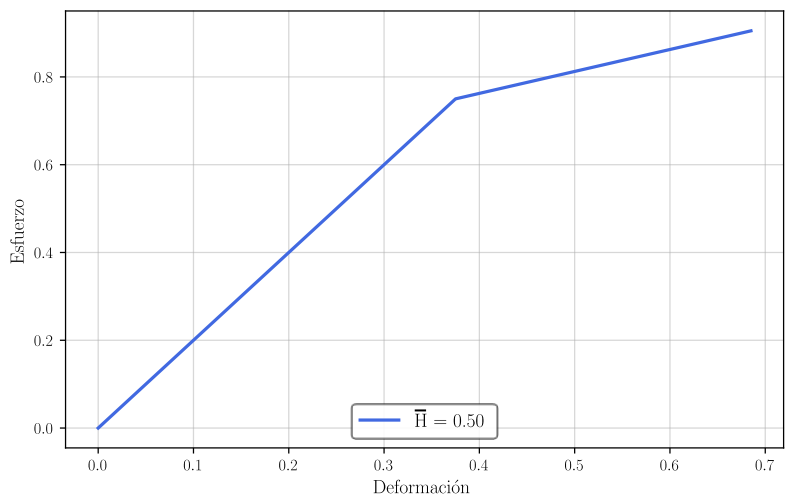


Figura 4.4.6. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $\bar{H} = 0.5$.

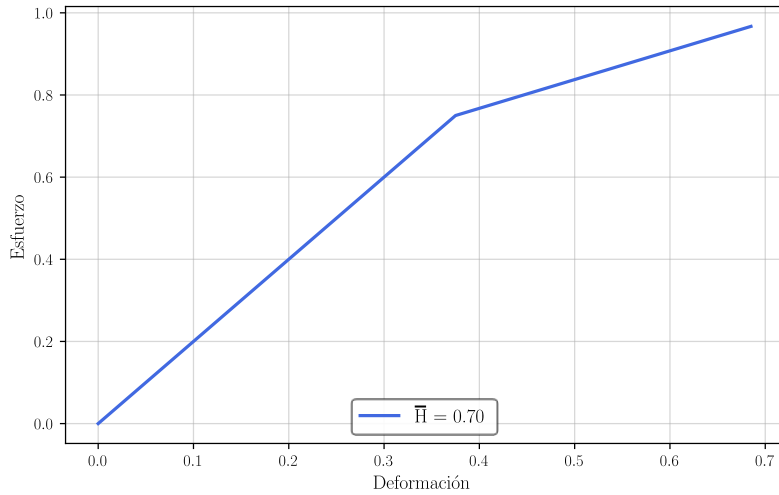


Figura 4.4.7. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $\bar{H} = 0.7$.

Entonces, luego de evaluar el modelo se obtuvieron los resultados una tolerancia estricta para que los resultados converjan adecuadamente sin alcanzar el máximo número de iteraciones. En la Figura 4.4.8, se muestra el resultado obtenido.

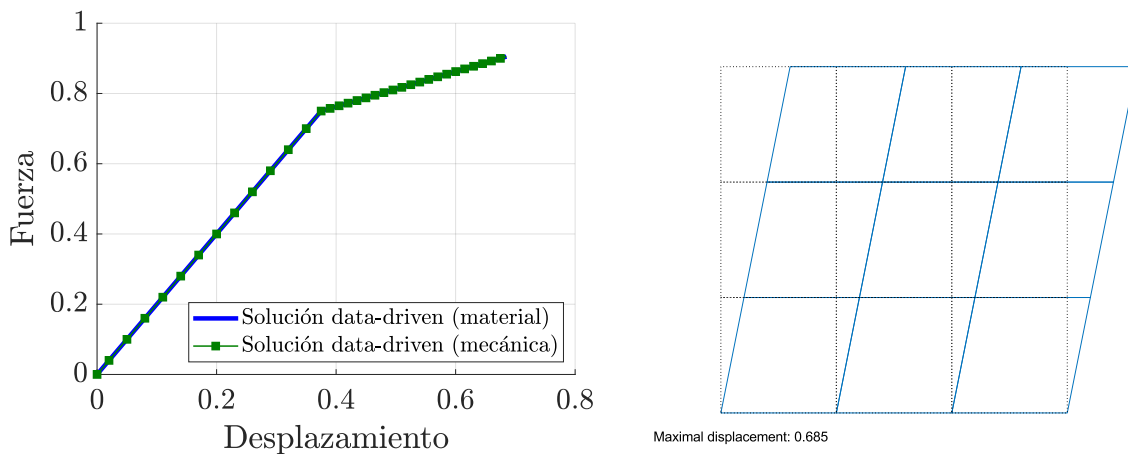


Figura 4.4.8. Caso 3B. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetros: Tolerancia = $1e-7$, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

De acuerdo a los resultados presentados, se permite indicar que, el modelo DD converge a una solución admisible dentro del caso de estudio y captura el comportamiento correcto del ensayo.

C) Implementación de ruido

Finalmente, se va a ingresar al modelo una serie de conjunto de datos de entrada con cierto grado de ruido. Es decir, evaluar la capacidad del método para obtener una solución adecuada cuando los datos provenientes de experimentación (realizada en laboratorio y/o

modelada numérica, como en este caso) presentan pares esfuerzo-deformación con cierta desviación de un comportamiento elastoplástico idealizado.

En dicho sentido, el conjunto de datos se muestra en la Figura 4.4.9, Figura 4.4.10 y Figura 4.4.11. Además, la generación de los mismos corresponde a una aleatorización sintética de acuerdo a una distribución normal (media 0 y desviación estándar 1) de valores de esfuerzo-deformación tomando como base las curvas elastoplásticas idealizadas (Figura 4.4.5, Figura 4.4.6 y Figura 4.4.7). A las cuales, se le aplicó un porcentaje de ruido para generar una mayor dispersión de los puntos materiales.

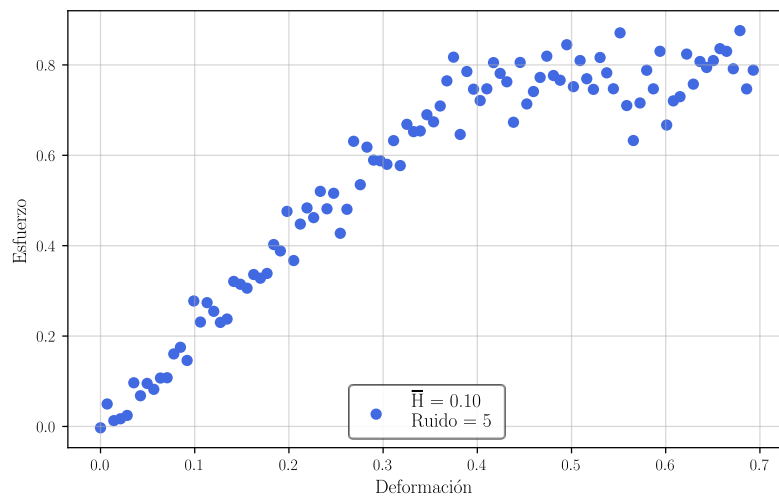


Figura 4.4.9. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $\bar{H} = 0.1$. Nivel de ruido = 5%.

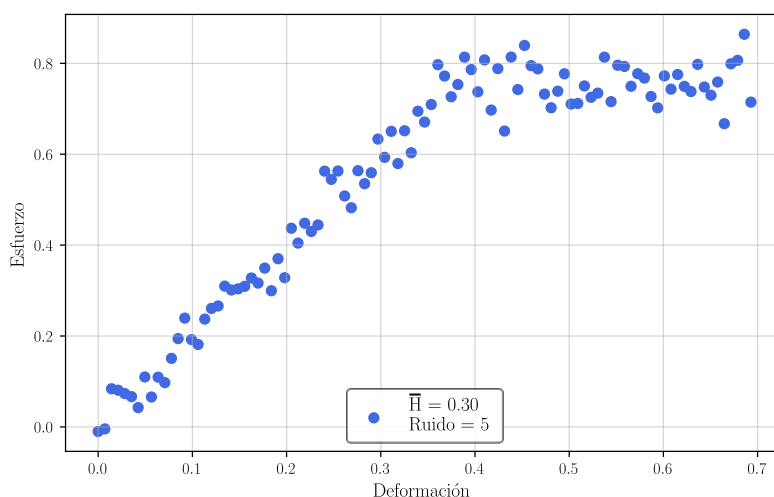


Figura 4.4.10. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $\bar{H} = 0.3$. Nivel de ruido = 5%.

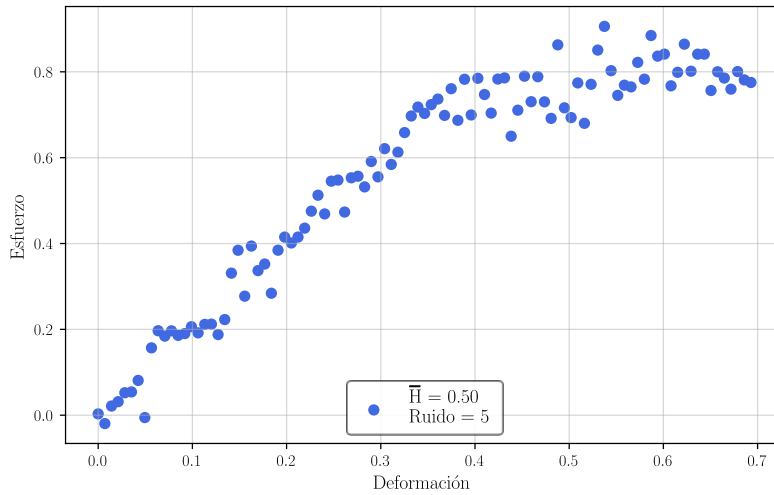


Figura 4.4.11. Curva elastoplástica de esfuerzo-deformación con endurecimiento. $\bar{H} = 0.5$. Nivel de ruido = 5%.

Con los datos en las figuras presentada e ingresados al modelo se obtuvieron los siguientes resultados.

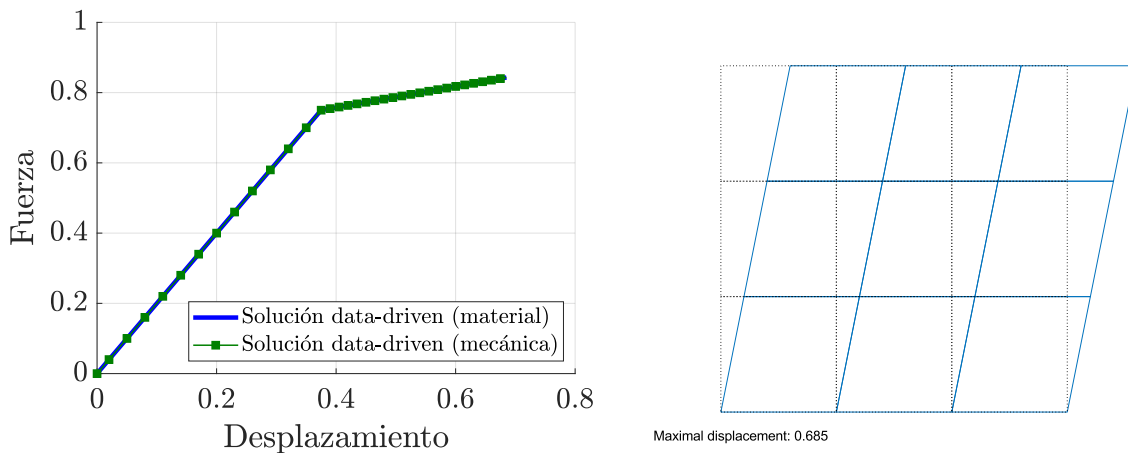


Figura 4.4.12. Caso 3C-1. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetro: Nivel de ruido: 5%, se incluye el conjunto de datos inicial, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 9 (izquierda Estado último de deformación de la placa (derecha)).

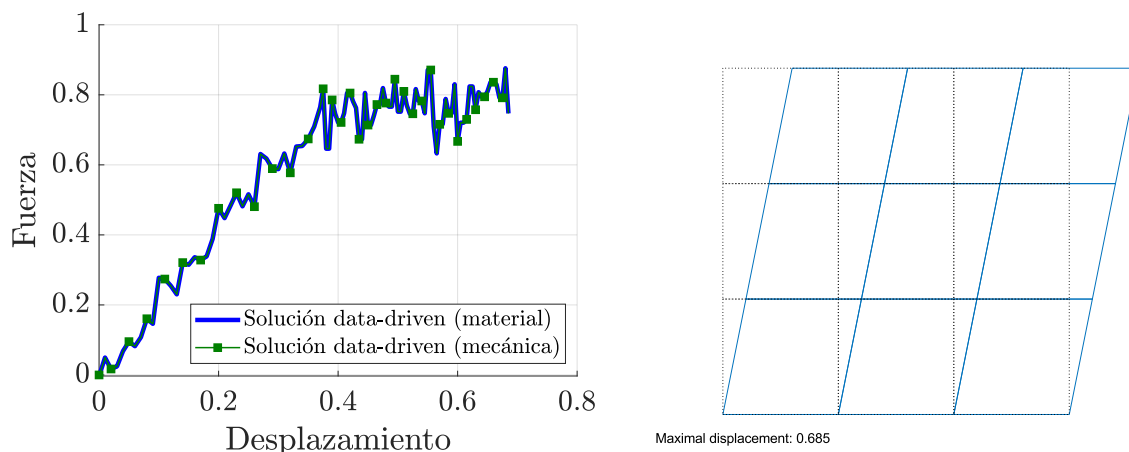


Figura 4.4.13. Caso 3C-2. Resultados del modelo DD con endurecimiento.

Parámetro: Nivel de ruido: 5%, no se incluye el conjunto de datos inicial, número de iteraciones alcanzadas = 5, número de elementos = 9 (izquierda Estado último de deformación de la placa (derecha)).

Es posible evidenciar la influencia del ruido en la solución del estado mecánico, de acuerdo al estado material correspondiente. Sin embargo, de acuerdo a la Figura 4.4.12 y Figura 4.4.13, se evidencia una correcta resolución del modelo, sin presencia de discontinuidades o saltos entre las soluciones mecánica y material que validan la convergencia del mismo. Lo cual se corrobora con el estado último deformación de la placa para cada caso.

La tendencia de los resultados obtenidos es bastante intuitiva, pues, a medida que aumenta el grado de ruido, el modelo presenta una menor aproximación a la solución idealizada (ver Figura 4.4.13). Sin embargo, cuando esta solución se encuentra dentro del conjunto de datos, el modelo DD converge adecuadamente (ver Figura 4.4.12). Es decir, el modelo encuentra una solución admisible dependiendo del conjunto de datos de ingreso.

4.5 Caso 4. Plasticidad con ablandamiento para un elemento bidimensional

4.5.1 Planteamiento del problema

Por último, se analiza el caso al cual corresponden los datos generados en la sección 0. Aquellos datos son los únicos que corresponden a los obtenidos mediante un método variacional a través de redes neuronales, es decir, se generaron mediante un método de minimización de energía conocido como Deep Ritz. En este último caso de estudio, la complejidad aumenta de manera significativa tanto en la obtención de los datos como en su procesamiento y utilización en el modelo DD. Se empieza por describir la discretización del elemento, es decir, las características geométricas que tendrá este. Observe la Figura 4.5.1, donde claramente se puede apreciar que se comparte la estructura con el caso anterior.

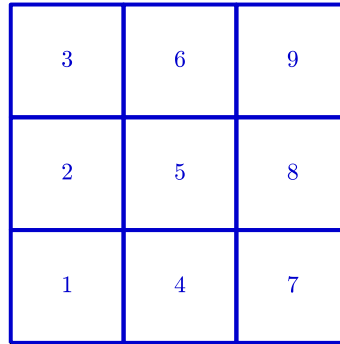


Figura 4.5.1. Placa bidimensional discretizada.

Las condiciones de contorno, al igual que en el caso 3, se pueden presentar de la siguiente manera, asumiendo que la malla es una placa cuadrada cuyos lados miden una unidad. Además, recordando que esta placa está sometida a un ensayo a corte siempre, se impone un desplazamiento monótono constante de $\delta = 0.685$.

$$u_x(x, 1) = \delta \quad \text{para } 0 \leq x < 1, \tag{4.7}$$

$$u_x(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x < 1 \tag{4.8}$$

4.5.2 Datos de entrada

El número de conjuntos de estados materiales de plasticidad con ablandamiento como datos de entrada son dos. Estos fueron obtenidos de acuerdo a las propiedades mecánicas obtenidas en la Tabla 4.5.1.

Tabla 4.5.1. Propiedades geométricas y mecánicas del elemento bidimensional.

Variable	Descripción	Magnitud
ν	Módulo de Poisson	0.4
E	Módulo de elasticidad	5.6

Dichos conjuntos de datos contienen la información necesaria para describir el comportamiento elástico y elastoplástico con ablandamiento de la celda unitaria. Ahora bien, recuerde que los datos fueron generados mediante el método de minimización de energía, por lo tanto, para obtener los dos conjuntos de datos mencionados con anterioridad, es necesario designar puntos de control dentro del total de puntos materiales que conforman la celda unitaria.

Se define dos regiones en la celda unitaria. La primera región corresponde a la fibra superior e inferior fuera de la banda de localización, la cual presenta un comportamiento elástico. La segunda región es la que se encuentra dentro de la banda en la celda con un comportamiento elastoplástico con ablandamiento. Observe la Figura 4.5.2.

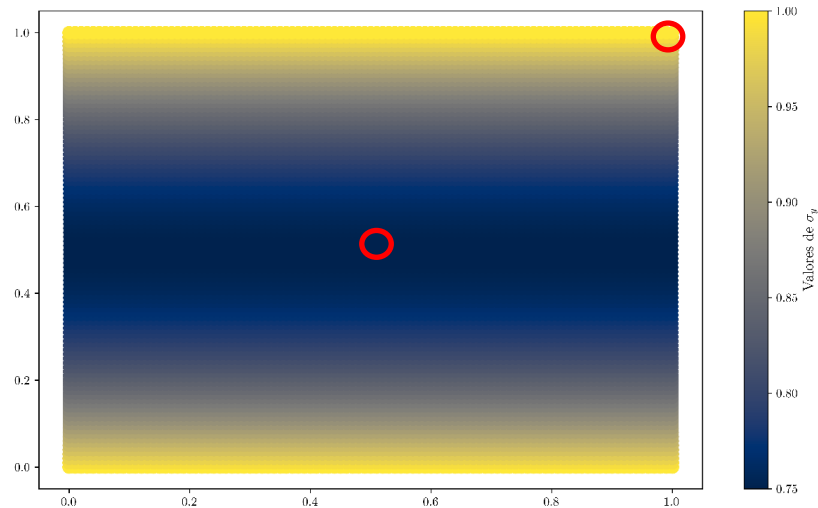


Figura 4.5.2. Regiones de la celda unitaria 2D.

En las figuras Figura 3.2.3 y Figura 3.2.4 se muestra el comportamiento de la zona elástica y elastoplástica de la celda unitaria respectivamente.

4.5.3 Metodología de resolución, presentación y análisis de resultados

A) Control de tolerancia y número de iteraciones del método

Las primeras aproximaciones para la resolución de este caso de estudio corresponden a la variación de los parámetros de convergencia, es decir, la tolerancia y el número de iteraciones. Al igual que en los casos anteriores, se intenta encontrar una solución admisible en el comportamiento entre la curva mecánica (solución de las ecuaciones de la mecánica del medio continuo) y material (estado del conjunto de datos).

Al momento de ingresar como dato la información elastoplástica de la celda unitaria, se aprecia que el modelo no converge adecuadamente cuando la tolerancia es poco estricta, ver Figura 4.5.3 (izquierda). Así como tampoco se genera la banda de localización de deformaciones (ver Figura 4.5.3, derecha).

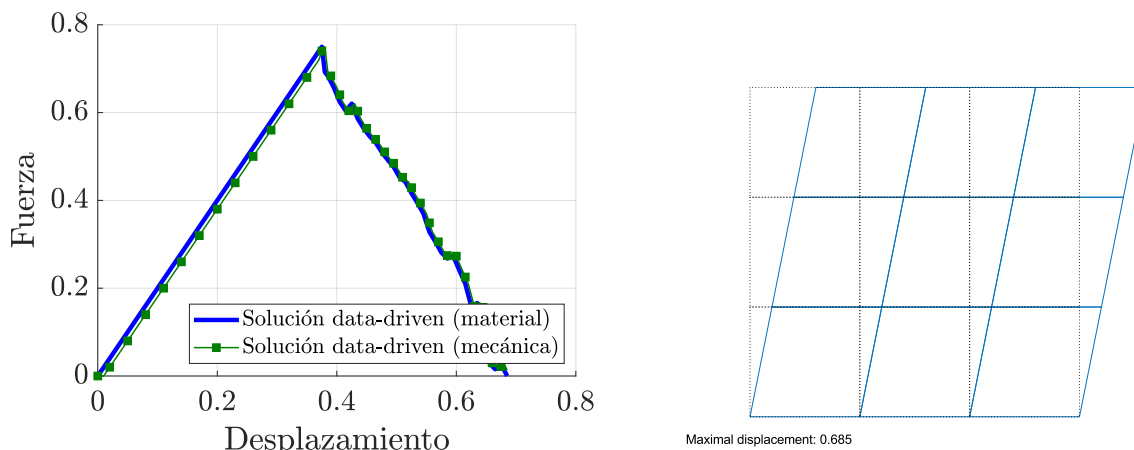


Figura 4.5.3. Caso 4A-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Parámetros: Tolerancia = 0.25, número de iteraciones alcanzadas = 1, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

Por otro lado, con una tolerancia estricta, la solución mecánica y material lograron converger, no obstante, en la deformada de la placa se visualiza que el modelo DD no captura la localización de deformaciones. Vea la Figura 4.5.4 (derecha).

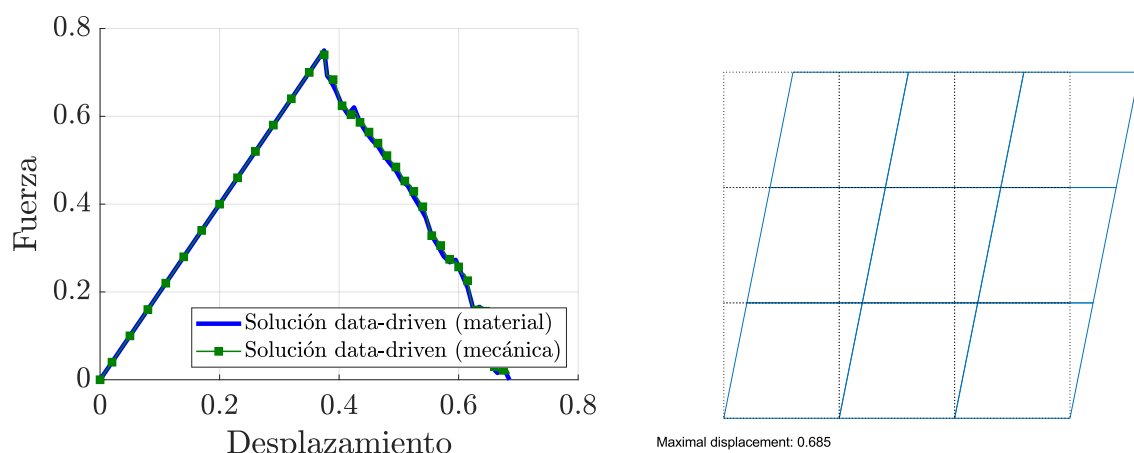


Figura 4.5.4. Caso 4A-2. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Parámetros: Tolerancia = 2.5e-4, número de iteraciones alcanzadas = 2, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

Entonces, el modelo no pudo encontrar una solución correcta del caso de estudio solo con la variación de los parámetros de convergencia, pero si se obtuvo una tolerancia que aproxima la resolución adecuadamente. Por lo tanto, se plantean perturbaciones para permitir que el modelo capture correctamente el comportamiento de elastoplasticidad con ablandamiento y posibilitar la formación de la banda de localización de deformaciones del caso de estudio.

La siguiente perturbación es análoga a cambiar la sección de la barra en la parte central (caso 2, ver apartado 4.3).

B) Perturbación por cambio de sección

La perturbación por cambio de sección corresponde a la generación de un elemento hueco, es decir, la eliminación de un elemento discretizado dentro de la placa (elemento 5 de la Figura 4.5.1). Con lo cual, se modifica la distribución de esfuerzos en la misma.

El significado de eliminar un elemento hace referencia a proponer que los cuatro puntos de integración de dicho elemento solo contengan valores en las deformaciones y no en los esfuerzos, es decir, sus esfuerzos en todas las direcciones serán cero. Observe la Figura 4.5.5, donde se puede apreciar de mejor manera cómo se generó el cambio de sección.

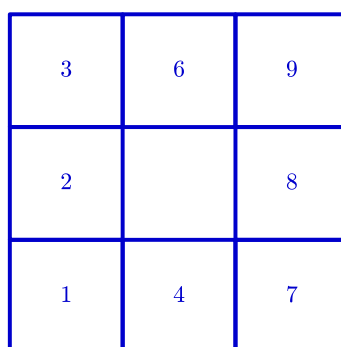


Figura 4.5.5. Cambio de sección para generar localización de deformaciones en la placa bidimensional.

Aplicada esta perturbación se obtuvo el resultado que se muestra en la Figura 4.5.6. Se puede apreciar que ahora existe una divergencia entre la solución mecánica y los datos del material.

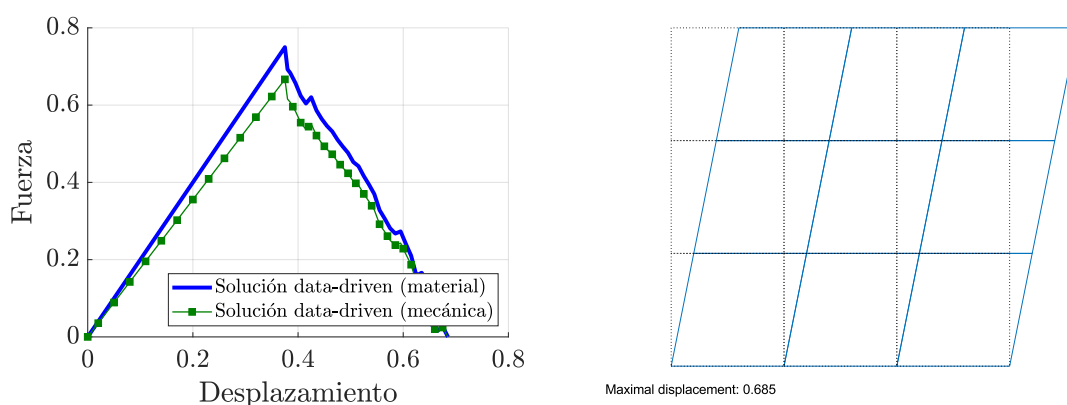


Figura 4.5.6. Caso 4B-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Parámetros: Tolerancia = 0.25, número de iteraciones alcanzadas = 100, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

Los resultados no mejoraron colocando esta perturbación, así que se combinó esta con la variación de los parámetros de convergencia. Esta combinación tampoco dio resultados importantes, pues la solución mecánica y material no convergieron.

Entonces, el cambio en los parámetros de convergencia si mejora la resolución del método en ciertas perturbaciones. Dicho esto, una tolerancia de 2.5×10^{-4} y un número máximo de iteraciones de 100; serán los parámetros de convergencia a lo largo de todo este caso de estudio.

C) Perturbación por Asignación de comportamiento material a cada elemento

Considerando que las perturbaciones anteriores no dieron resultados favorables, otra alternativa es asignar el conjunto de datos a cada elemento considerando que las deformaciones se deben concentrar en los elementos 2, 5 y 8 (ver Figura 4.5.1). Es decir, se prevé que dichos elementos van a presentar un comportamiento elastoplástico con ablandamiento. En tanto que, para el resto de elementos de la placa, se espera que se comporten elásticamente.

En la Figura 4.5.7 se pueden apreciar los resultados luego de aplicar esta perturbación al modelo DD.

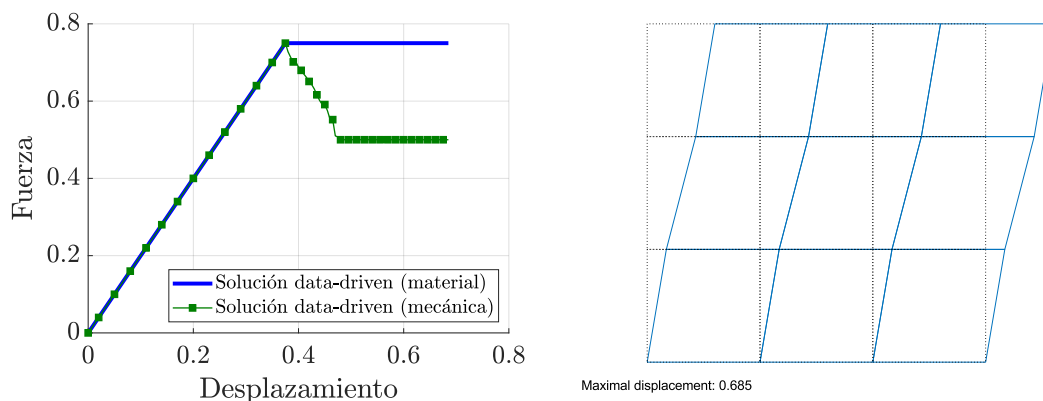


Figura 4.5.7. Caso 4C. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Parámetros: Tolerancia = $2.5e-4$, número de iteraciones alcanzadas = 100, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha).

En este caso, el modelo DD no converge adecuadamente, lo cual se puede evidenciar en la Figura 4.5.7 (izquierda), sin embargo, la deformación de la placa sugiere una zona de ablandamiento en la mitad de la misma (lugar donde se asignó un comportamiento elastoplástico con ablandamiento). Este resultado es clave, ya que la tendencia constante de la curva material a partir del desplazamiento $\delta = 0.375$ se mantiene en los posteriores resultados. Dicho de otra forma, en las variaciones que se verán a continuación, las soluciones mecánica y material dejan de converger siempre a partir del desplazamiento mencionado, es decir, desde que el elemento ingresa en plasticidad con ablandamiento.

Tome en cuenta que, cuando se asignaron los datos del comportamiento elástico, estos se interpretaron como si fuera un ensayo de carga y descarga. Por lo tanto, los pares de

esfuerzo-deformación dentro de las regiones elásticas del elemento, a partir de que se encontró plasticidad, se regresaron por la misma rama.

D) Aleatorización en el Método de minimización de la energía del Modelo DD

La forma en la que se determina la convergencia entre la solución mecánica calculada por el modelo DD y los datos del comportamiento del material se realiza mediante la función de minimización y su proyección al punto material más cercano (ver apartado 2.5).

Esta perturbación inducida permite que la restricción en el cálculo de la minimización sea: solo considerando los esfuerzos (mecánicos y materiales) o solo las deformaciones (mecánicas y materiales) dentro de la métrica adecuada que utiliza el modelo DD. En la Figura 4.5.8 puede apreciar un primer resultado que considera el cálculo de la métrica usada en el mecanismo de minimización mediante las deformaciones solamente.

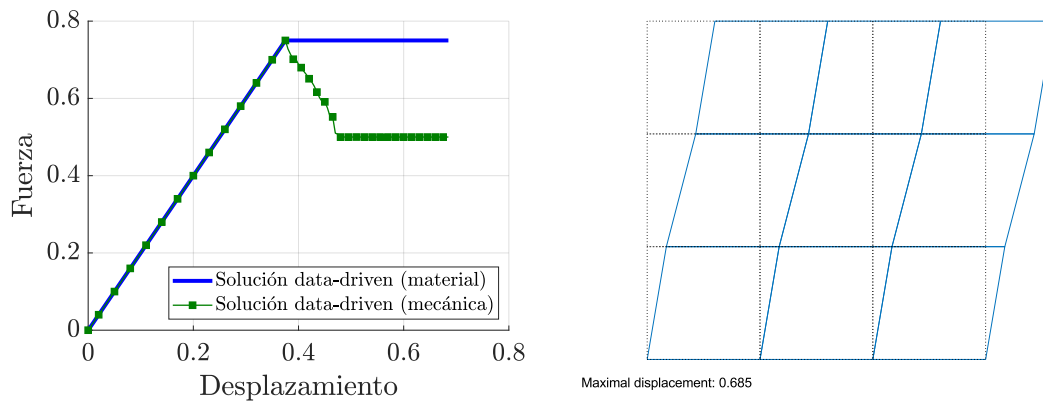


Figura 4.5.8. Caso 4D-1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Parámetros: Tolerancia = $2.5e-4$, número de iteraciones alcanzadas = 100, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha). Cálculo de la métrica solo con deformaciones.

Como se observa, no se presenta cambio entre este resultado y el que se mostró previamente en la Figura 4.5.7, es decir, sigue habiendo la tendencia constante de la solución material a partir de que el experimento entra en ablandamiento.

Por otro lado, en la Figura 4.5.9 se presentan los resultados obtenidos de considerar solamente los esfuerzos dentro de la métrica como medio para convergencia del modelo DD.

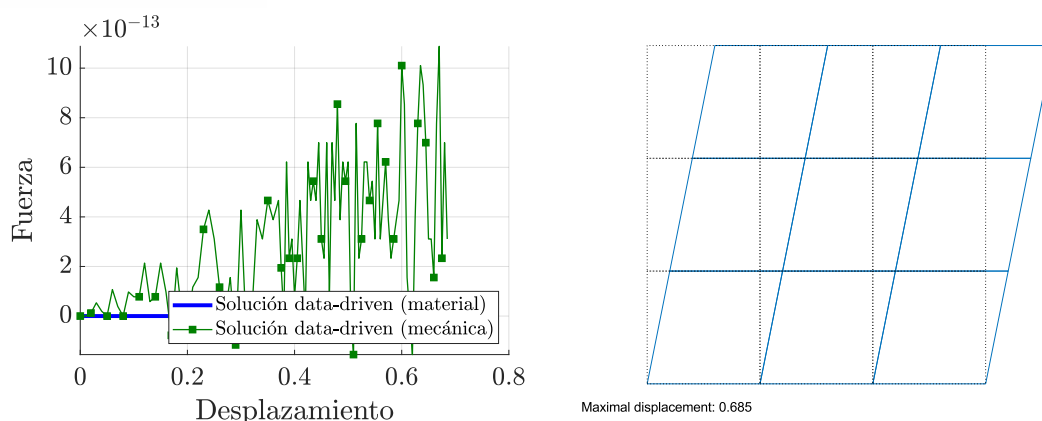


Figura 4.5.9. Caso 4D-2. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Parámetros: Tolerancia = $2.5e-4$, número de iteraciones = 100, número de elementos = 9 (izquierda). Estado último de deformación de la placa (derecha). Cálculo de las distancias solo con esfuerzos.

En este caso, se genera una variación fuerte entre la solución mecánica y material. Y, a su vez, presenta una diferencia significativa con los resultados obtenidos de la minimización a través de las deformaciones solamente (ver Figura 4.5.8). Es decir, no se tiene una solución correcta y admisible al problema.

Entonces, las deformaciones presentan mayor incidencia en la métrica dentro del mecanismo de convergencia por minimización que los esfuerzos. A su vez, calcular las distancias mediante deformaciones o esfuerzos solamente no permite al modelo DD encontrar una solución adecuada.

Ahora, entra en discusión combinar estos últimos resultados, pero aleatoriamente, es decir, en cada paso de tiempo que la restricción de minimización se calcule solamente a través de deformaciones o esfuerzos. Además, esta aleatorización se realiza a partir de que el experimento incurre en el rango plástico con ablandamiento.

E) Combinaciones

Se han visto cambios en la resolución del método cuando se han aplicado las perturbaciones estudiadas, por lo que, ahora se analiza la combinación de varias perturbaciones para la resolución del problema planteado.

Tome en cuenta que, en las siguientes perturbaciones, se toman los parámetros de convergencia que fueron definidos en los apartados anteriores, es decir, no se analizan nuevos casos por el cambio de la tolerancia.

Además, la información de entrada (conjuntos de datos) se sigue manteniendo, al igual que en todos los casos vistos en esta sección. Esto significa que cualquier mejora en las aproximaciones del método se deben a las perturbaciones impuestas.

- **Combinación 1.** Asignación de los conjuntos de datos a cada región y cambio en la sección del elemento.

En esta combinación, se realiza una redistribución de esfuerzos, tratando que las deformaciones se concentren en los elementos 2 y 8 (ver Figura 4.5.5). Además, que la información material en estos dos elementos, corresponda al comportamiento elastoplástico con ablandamiento que se obtuvo de la celda unitaria (ver Figura 3.2.4). En tanto que, los otros elementos tendrán un comportamiento elástico (ver Figura 3.2.3).

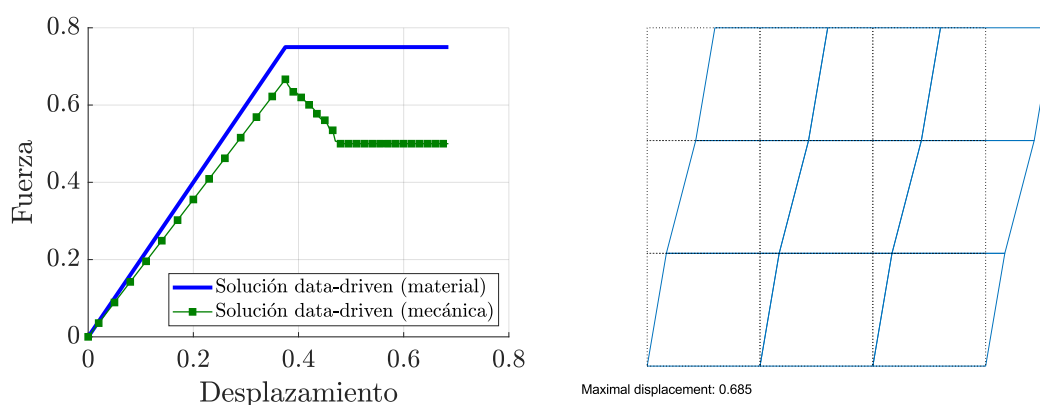


Figura 4.5.10. Combinación 1. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Como se aprecia en la Figura 4.5.10, el resultado de la deformada sugiere una zona de concentración de deformaciones, similar al esperado en ablandamiento, sin embargo, aún no se encuentra bien definida. Además, no existe convergencia entre la solución mecánica y material calculadas por el modelo DD. Se debe apreciar que, al igual que en la Figura 4.5.6, la solución mecánica está por debajo de la solución material. A partir del desplazamiento $\delta = 0.375$ (donde la placa comienza incurrir en plasticidad), ambas soluciones divergen una de la otra, tal como pasa en la Figura 4.5.7. Este análisis evidencia que las combinaciones se superponen, lo cual, indica que el análisis se está realizando de manera adecuada.

- **Combinación 2.** Asignación de los conjuntos de datos y aleatorización en la métrica de minimización del modelo DD.

Antes de describir esta combinación de perturbaciones, es necesario indicar que se está intentando que la solución mecánica y material converjan adecuadamente. En esta combinación se implementan 2 perturbaciones importantes, asignar los conjuntos de datos a cada elemento por separado y aleatorizar la métrica de minimización del modelo entre los esfuerzos y deformaciones mecánicos y materiales.

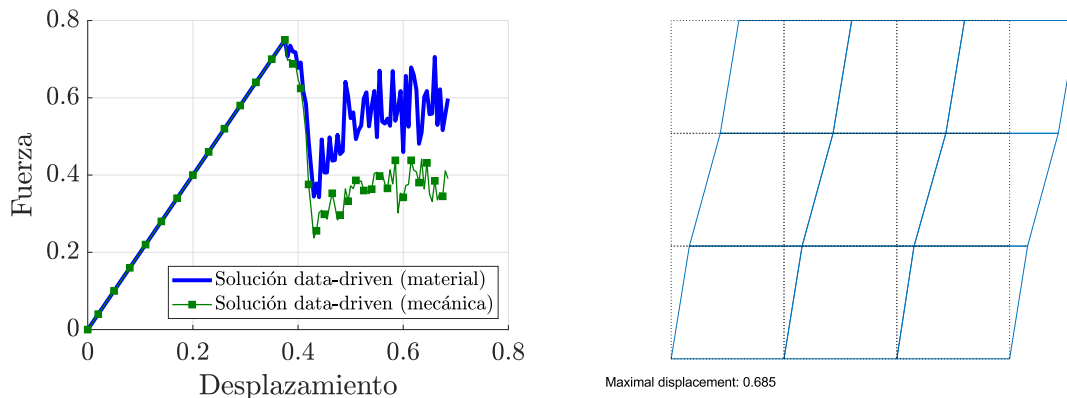


Figura 4.5.11. Combinación 2. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Como se aprecia en la Figura 4.5.11, la deformada nuevamente indica un atisbo de la zona de concentración de deformaciones, similar al esperado, sin embargo, la solución mecánica y material siguen sin converger.

Además, las curvas del comportamiento mecánico y material resultante cuando se aplica la aleatorización en la restricción de minimización se desvían fuertemente una de la otra a partir del desplazamiento $\delta = 0.375$ (estado desde donde la placa comienza incurrir en plasticidad con ablandamiento). Por lo tanto, esta combinación de perturbaciones no solucionó el caso de estudio planteado.

- **Combinación 3.** Asignación de los conjuntos de datos, cambio de sección en el elemento y aleatorización en la métrica de minimización del modelo DD.

En esta combinación se implementan 3 perturbaciones importantes, asignar los conjuntos de datos a cada elemento por separado, redistribuir los esfuerzos quitando el elemento número 5 de la placa discretizada y aleatorizando la métrica de esfuerzos y deformaciones mecánicas y materiales del modelo DD.

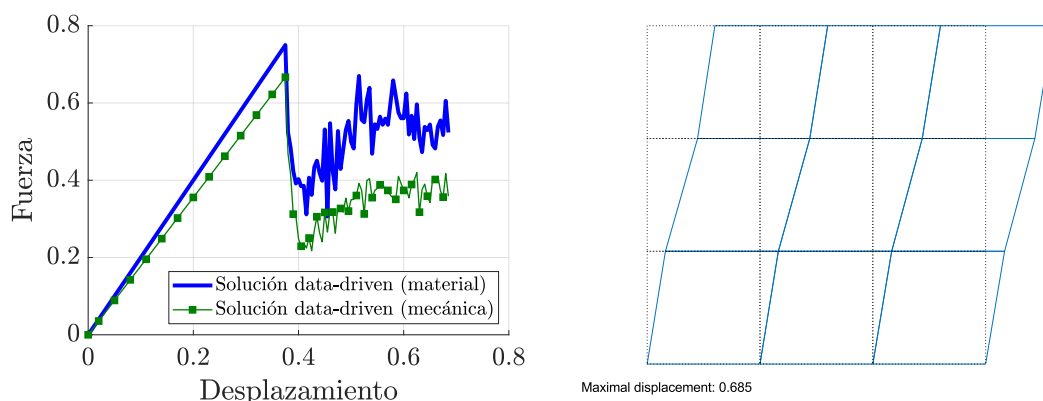


Figura 4.5.12. Combinación 3. Resultados del modelo DD con ablandamiento en 2D.

Como se aprecia en la Figura 4.5.12, nuevamente la deformada no exhibe una zona de localización de deformaciones bien definida. Así mismo, la solución mecánica y material no

convergen o se aproximan adecuadamente. Además, el comportamiento del resultado cuando se aplica la aleatorización del cálculo de las distancias se combina con la forma en que la solución mecánica está por debajo de la solución material, lo que sugiere una combinación de perturbaciones exitosa.

Similar al caso anterior, no se logra una convergencia después del desplazamiento de $\delta = 0.375$, pero tampoco antes de dicho desplazamiento límite. Por lo que, no se tiene una solución admisible al problema.

Finalmente, luego de implementar todas las perturbaciones mencionadas, el modelo DD no logró capturar adecuadamente el comportamiento elastoplástico con ablandamiento, al igual que, tampoco se produjo una zona claramente definida en la que se localicen las deformaciones.

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se ha explorado a nivel de prueba de concepto el uso e implementación de un modelo *data-driven* (DD) como alternativa para describir el comportamiento elastoplástico en sólidos a escala macroscópica, tomando como punto de partida información de la microescala. Para esto se han usado bases de datos que representan el comportamiento material de dichos sólidos sin requerir de leyes o ecuaciones constitutivas explícitas.

Se realizaron experimentos virtuales sobre una celda unitaria para generar bases de datos que permitan capturar el comportamiento material. El objetivo era probar el modelo DD orientado al estudio de una placa bidimensional con ablandamiento. Por otro lado, en los casos con comportamientos mecánicos más sencillos, como, por ejemplo, elementos estructurales unidimensionales, se optó por la generación de datos sintéticos. Esto se hizo también para la configuración bidimensional con endurecimiento.

Para probar la metodología se requirió usar, en todos los casos de ablandamiento, perturbaciones sobre el modelo DD. Se estudiaron los efectos de estas perturbaciones en la solución para cada caso de estudio. En ese contexto, las situaciones particulares de cada experimento virtual proporcionaron guías para comprender los límites del funcionamiento del modelo DD.

Particularmente, en el Caso 1 (barra con endurecimiento), mediante la variación en los parámetros de convergencia, se obtuvo que las soluciones mecánicamente admisibles del problema converjan con el comportamiento material correspondiente. Es decir, el Caso 1 encuentra una solución controlando la tolerancia o número de iteraciones dentro del modelo DD. Similar resolución la exhibe el Caso 3 (placa con endurecimiento), el cual presenta una convergencia adecuada. Además, para verificar fiabilidad y robustez, se estudió una serie de comportamientos particulares (ruido y comportamientos elastoplásticos variados). Estas incorporaciones no provocaron cambios cualitativos. Entonces se concluye que los casos de plasticidad con endurecimiento validan la aplicabilidad del modelo DD.

Por otra parte, los casos de estudio de plasticidad con ablandamiento provocaron mayores inconvenientes para que el modelo DD capture una solución adecuada. Para el Caso 2 (barra con ablandamiento) se encontró un resultado mecánico válido, sin embargo, fue necesario aplicar una perturbación geométrica (angostamiento de sección transversal) en la zona sobre la cual se espera que el elemento se ablande. La discretización en 3 elementos y la reducción del 10% del área como perturbación, produjeron que el modelo capture ablandamiento en el

elemento. Sin embargo, al densificar la configuración a 5 elementos, el modelo no pudo resolver de manera adecuada el comportamiento.

En los resultados del Caso 4 (placa con ablandamiento), a diferencia del Caso 2, el modelo DD no capturó el comportamiento adecuado. La aplicación de perturbaciones como: el cambio de sección, la asignación de estados materiales determinados y la aleatorización en el método de restricción mediante la minimización de la energía, no proporcionaron una adecuada convergencia. En consecuencia, el problema mecánico de elastoplasticidad con ablandamiento genera complicaciones a la resolución del modelo.

Por lo tanto, cuando el caso de estudio cuyo comportamiento es relativamente sencillo (elasticidad y plasticidad con endurecimiento) se valida que el modelo DD se desempeña adecuadamente. Sin embargo, para comportamientos más complejos (plasticidad con ablandamiento) se suscitan problemas en la resolución y convergencia del estado mecánico. Esta complejidad ya ha sido reportada en la literatura (Ulloa et al., 2024) [15]. En esta referencia, se recurrió a teorías de continuos aumentados para regularizar el problema, lo cual, sale del alcance de este trabajo.

Finalmente, y con miras al desarrollo y aplicación del método, se deja una aproximación (como prueba de concepto) al potencial del modelo *data-driven*. No obstante, aún requiere de la implementación de técnicas numéricas, parámetros y conceptos matemáticos y mecánicos que proporcionen al método una vía para capturar el comportamiento elastoplástico con ablandamiento adecuadamente.

Referencias

- [1] Bensoussan, A., Lions, J.-L., & Papanicolaou, G. (2011). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. American Mathematical Soc.
- [2] Ciftci, K. Y., Michel, A., & Siegfried, P. (2022). Introduction to the Potential Impact of E-Mobility on the Automotive Value Chain. En K. Y. Ciftci, A. Michel, & P. Siegfried (Eds.), *The Potential Impact of E-Mobility on the Automotive Value Chain* (pp. 1–3). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95599-1_1
- [3] Conti, S., Müller, S., & Ortiz, M. (2018). Data-Driven Problems in Elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 229(1), 79–123. <https://doi.org/10.1007/s00205-017-1214-0>
- [4] Eggersmann, R., Kirchdoerfer, T., Reese, S., Stainier, L., & Ortiz, M. (2019). Model-Free Data-Driven inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 350, 81–99. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.016>
- [5] Griewank, A., & Walther, A. (2008). *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation, Second Edition*. SIAM.
- [6] Karapiperis, K., Stainier, L., Ortiz, M., & Andrade, J. E. (2021). Data-Driven multiscale modeling in mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 147, 104239. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104239>
- [7] Kirchdoerfer, T., & Ortiz, M. (2016). Data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 304, 81–101. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.02.001>
- [8] Kirchdoerfer, T., & Ortiz, M. (2017). Data Driven Computing with noisy material data sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326, 622–641. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.07.039>
- [9] León, O., Rivera, V., Vázquez-Patiño, A., Ulloa, J., & Samaniego, E. (2025). Exploring energy minimization to model strain localization as a strong discontinuity using Physics

- Informed Neural Networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 436, 117724. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117724>
- [10] Oliver Olivella, X., & Agelet De Saracibar Bosch, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros* (2a ed.). Edicions UPC. <https://doi.org/10.5821/ebook-9788498802177>
- [11] Pavliotis, G. A., & Stuart, A. (2008). *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*. Springer Science & Business Media.
- [12] Prume, E., Stainier, L., Ortiz, M., & Reese, S. (2023). A data-driven solver scheme for inelastic problems. *PAMM*, 23(1), e202200153. <https://doi.org/10.1002/pamm.202200153>
- [13] Simo, J. C. (with Hughes, T. J. R.). (2000). *Computational Inelasticity*. Springer New York.
- [14] Ulloa, J., Gorgogianni, A., Karapiperis, K., Ortiz, M., & Andrade, J. E. (2023). Data-driven breakage mechanics: Predicting the evolution of particle-size distribution in granular media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 178, 105328. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2023.105328>
- [15] Ulloa, J., Stainier, L., Ortiz, M., & Andrade, J. E. (2024). Data-driven micromorphic mechanics for materials with strain localization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 429, 117180. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117180>
- [16] Zhang, Y., Li, Q.-J., Zhu, T., & Li, J. (2022). Learning constitutive relations of plasticity using neural networks and full-field data. *Extreme Mechanics Letters*, 52, 101645. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2022.101645>